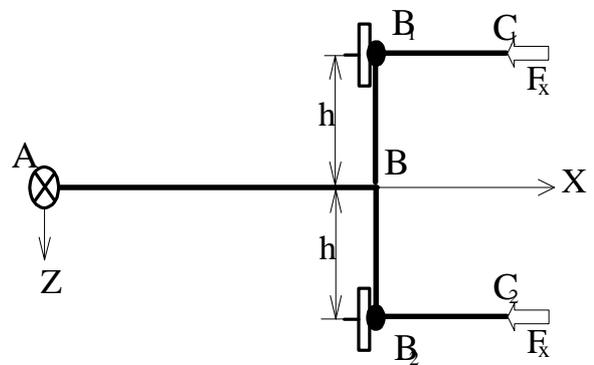
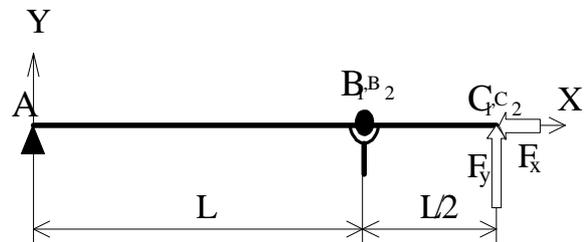
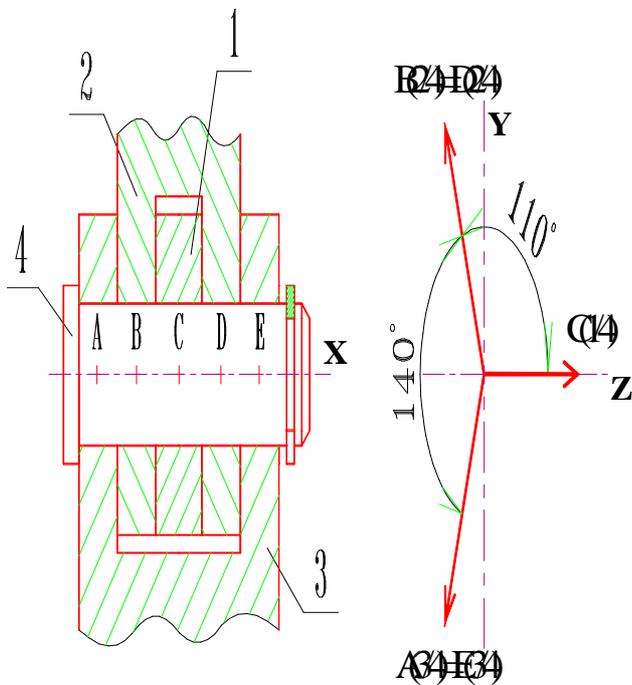


S.BENSAADA

RESISTANCE DES MATERIAUX



SOMMAIRE

2. MOMENTS QUADRATIQUES.....	47
3. ELEMENTS VECTORIELS.....	51
4. MODELISATION DES ACTIONS MECANQUES.....	61
5. E L A S T I C I T E.....	76
6. HYPOTHESES EN RDM.....	102
7. TRACTION	119
8. COMPRESSION.....	125
9. CISAILLEMENT.....	129
10. TORSION.....	135
11.FLEXION.....	140
12. TORSEUR DE COHESION.....	151
13. POUTRES RECTANGULAIRES AUX ELS.....	167
14. CONTRAINTES PLANES.....	179
15. DEFORMEE.....	189
16.FLAMBAGE.....	196
17.SYSTEMES HYPERSTATIQUES.....	202
18.Ressorts Hélicoïdaux à fil rond.....	209
19.DEFORMATION PLANE.....	216
20. ESSAIS MECANIQUE.....	237
21.TP ELEMENTS FINIS FLEXION.....	257

PREFACE

La genèse d'une innovation technologique est constituée par l'ensemble des faits scientifiques et techniques qui ont concouru à sa formation. La connaissance approfondie de cette phase préalable, difficile à observer quand elle est en cours, mais pourrait se reconstituer, à posteriori, est essentielle pour tenter de prévoir et de diriger le flux des changements techniques tout le long des différentes étapes des développements scientifiques

Cet ouvrage traite les fondements de la résistance des matériaux. Il expose profondément les notions de tenseurs, une partie très utile pour les calculs en résistance des matériaux. Les éléments vectoriels ainsi que la modélisation des actions mécaniques sont introduite aussi dans cet ouvrage.

Les parties essentielles tels que la traction, compression, torsion, flexion sont étudiées en détail et vue leur importance technique, une partie sur les différents essais mécaniques a été introduite. La dernière partie a été consacrée à l'étude de la modélisation et du logiciel utilisé en RDM.

L'étudiant aura à s'imprégner de l'ensemble des questions exposées dans ce contexte.

Cependant, à travers cet ouvrage, j'ai essayé de porter toute l'attention et le soin voulus, du point de vue pédagogique et didactique, afin de vous exposer, de manière utile, les bases fondamentales de la RDM au service des étudiants de troisième année hydraulique.

Cet ouvrage n'a pas d'autre but que d'aider l'étudiant dans sa compréhension de l'enseignement de la Résistance des Matériaux. Il doit permettre de mieux cerner les champs d'investigation de cette science.

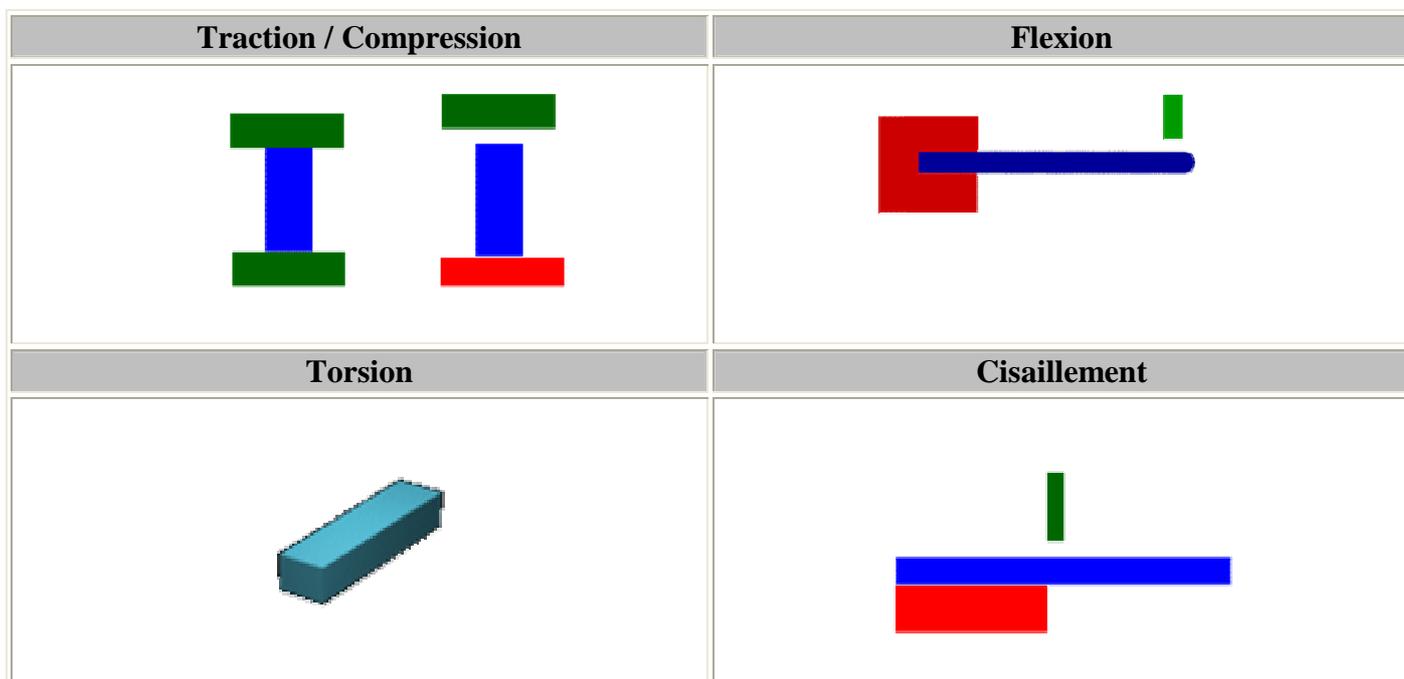
BUT DE LA RESISTANCE DES MATERIAUX

La résistance des matériaux est l'étude de la résistance et de la déformation des solides (arbres de transmission, bâtiments, fusées, . .) dans le but de déterminer ou de vérifier leurs dimensions afin qu'ils supportent les charges dans des conditions de sécurité satisfaisantes et au meilleur coût (optimisation des formes, des dimensions, des matériaux. . .)

ACTIONS	DONNEES NECESSAIRES
Déterminer les dimensions fonctionnelles de la pièce	Les Actions Mécaniques La nature du matériau
Choisir le matériau constituant la pièce	Les Actions Mécaniques Les dimensions de la pièce Le type de vérification
Vérifier la résistance à la "casse" de la pièce : Dépassement de la limite à la résistance élastique R_e ou à la rupture R_r du matériau	Les Actions Mécaniques Les dimensions de la pièce La nature du matériau
Vérifier la résistance à la "déformation" de la pièce : Dépassement de la valeur maximale imposée par le C.D.C.F. pour les différentes déformations de la pièce	Les Actions Mécaniques Les dimensions de la pièce La nature du matériau Le C.D.C.F.
Vérifier la résistance à la "fatigue" de la pièce : Rupture après un certain nombre de cycles de déformation imposée par le C.D.C.F.	Les Actions Mécaniques Les dimensions de la pièce La nature du matériau
Vérifier la résistance au "fluage" de la pièce : Déformation continue de la pièce, dans le temps, sous l'action d'actions mécaniques constantes qui amène à la rupture de la pièce	Les Actions Mécaniques Les dimensions de la pièce La nature du matériau Le C.D.C.F.
Optimiser le coût de la pièce par changement des formes, des dimensions, des matériaux, ...	Les Actions Mécaniques Les dimensions de la pièce La nature du matériau Le C.D.C.F.

1. Notions de sollicitations

Les sollicitations couramment rencontrées :



SOLLICITATIONS SIMPLES ET COMPOSEES :

Sollicitations simples : Torseur de cohésion comprenant une seule sollicitation.

Sollicitations composées : Torseur de cohésion comprenant plusieurs sollicitations simples (Traction + flexion par exemple).

Tableau regroupant les sollicitations simples les plus courantes

Sollicitations	Effort normal	Effort tranchant	Moment de torsion	Moment de flexion	
Traction/compression	N	T = 0	$M_t = 0$	$M_f = 0$	
Cisaillement (1)	N = 0	T	$M_t = 0$	$M_f = 0$	
Torsion	N = 0	T	M_t	$M_f = 0$	
Flexion pure (2)	N	T = 0	$M_t = 0$	M_f	

(1) Suivant l'orientation des sollicitations, l'effort T_y ou T_z peut être nul.

(2) Suivant l'orientation des sollicitations, le moment M_{fy} ou M_{fz} peut être nul.

2. MOMENTS QUADRATIQUES

2.1. MOMENT QUADRATIQUE D'UNE SURFACE PLANE PAR RAPPORT A UN AXE DE SON PLAN

Définition

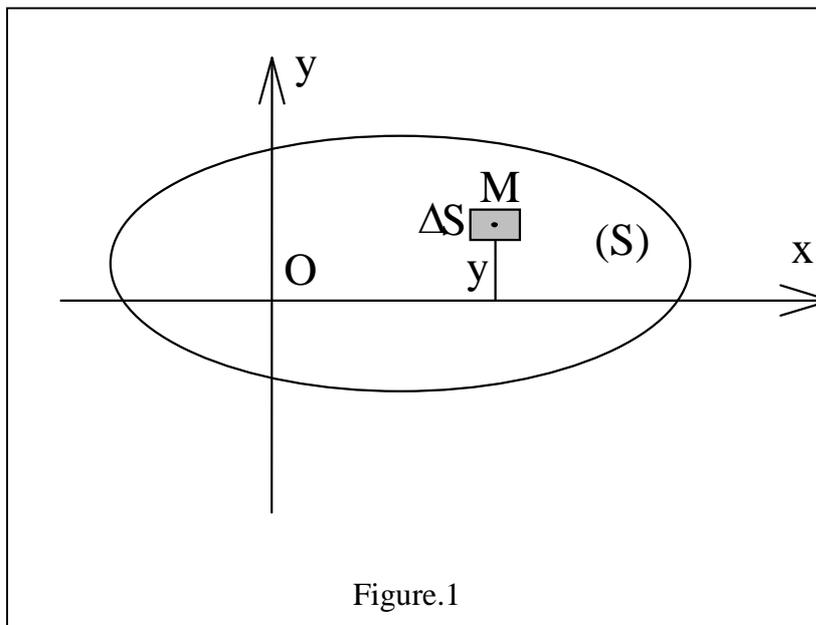
Soit (S) une surface plane et un repère orthonormé (O, \vec{x}, \vec{y}) de son plan figure.1

Le moment quadratique élémentaire de ΔS par rapport à (O, \vec{x}) noté ΔI_{OX} est défini par :

$$\Delta I_{OX} = y^2 \cdot \Delta S$$

et pour l'ensemble de la surface (S) :

$$I_{OX} = \sum_{(S)} y^2 \cdot \Delta S$$



Remarques :

- . L'unité de moment quadratique est le mm^4 (ou le m^4)
- . Un moment quadratique est toujours positif.
- . Les moments quadratiques des surfaces "simples" sont donnés à la fin du cours.

2.2 MOMENT QUADRATIQUE D'UNE SURFACE PLANE PAR RAPPORT A UN AXE PERPENDICULAIRE A SON PLAN . MOMENT QUADRATIQUE POLAIRE

Définition

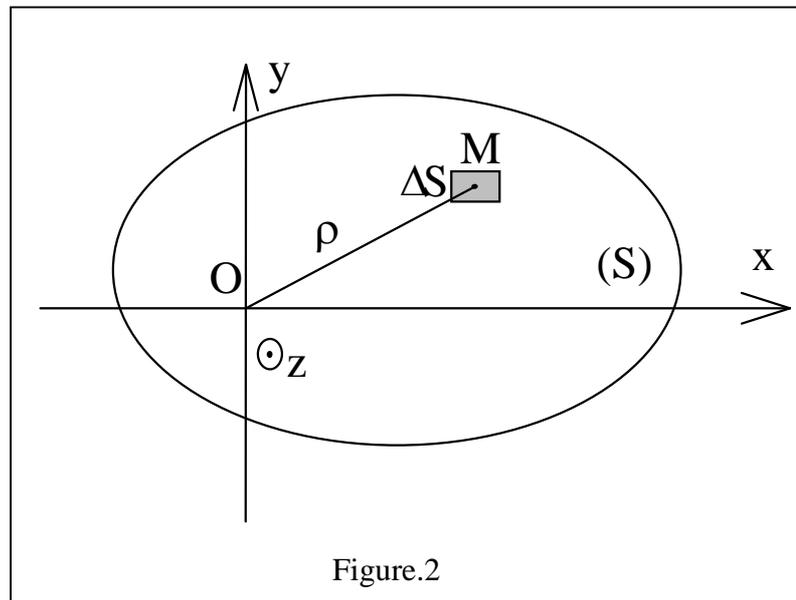
Soit (S) une surface plane et un repère orthonormé $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tel que le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) soit confondu avec le plan de (S) figure.2

Le moment quadratique polaire élémentaire de ΔS par rapport à (O, \vec{z}) perpendiculaire en O au plan de la figure et noté ΔI_O est défini par :

$$\Delta I_O = \rho^2 \cdot \Delta S$$

et pour l'ensemble de la surface (S) :

$$I_O = \sum_{(S)} \rho^2 \cdot \Delta S$$



Propriété :

Considérons le moment quadratique polaire I_O de la surface (S) par rapport à (O, \vec{z}) perpendiculaire en O à son plan figure.3

Notons :
$$I_O = \sum_{(S)} \rho^2 \cdot \Delta S$$

Soient x et y les coordonnées du point M. On a :

$$\rho^2 = x^2 + y^2$$

On a donc :
$$I_O = \sum_{(S)} \rho^2 \cdot \Delta S = \sum_{(S)} x^2 \cdot \Delta S + \sum_{(S)} y^2 \cdot \Delta S$$

Soit :
$$I_O = I_{Ox} + I_{Oy}$$

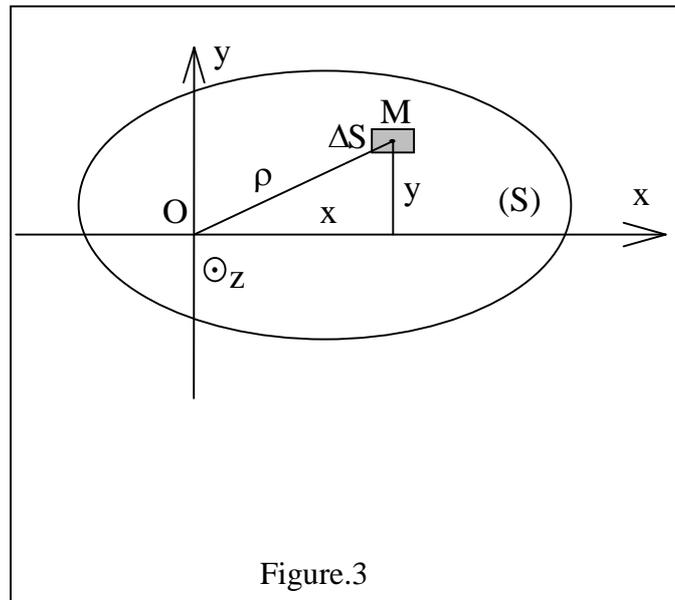


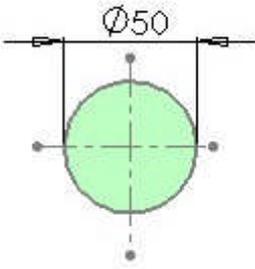
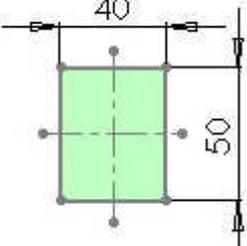
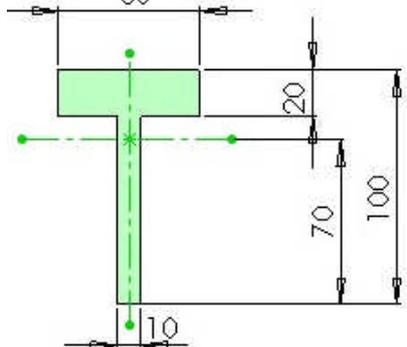
Figure.3

2.3. MOMENTS QUADRATIQUES A CONNAITRE (O est en G)

	I_{GX}	I_{GY}	$I_G = I_o$
	$\frac{bh^3}{12}$	$\frac{hb^3}{12}$	$\frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$
	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{12}$	$\frac{a^4}{6}$
	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{64}$	$\frac{\pi d^4}{32}$
	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)$	$\frac{\pi}{32}(D^4 - d^4)$

Figure.4

Soit une poutre subissant un moment de torsion $M_t = 5000 \text{ N.m}$
 On considèrera trois géométries de section possibles, mais ayant la même aire.

<p>Section circulaire</p>  $I_0 = \frac{\pi D^4}{32}$	<p>Section rectangulaire</p>  $I_0 = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$	<p>Section en T</p>  $I_0 = 2033333 \text{ mm}^4$
--	---	--

TRAVAIL DEMANDE

Pour chaque type de section :

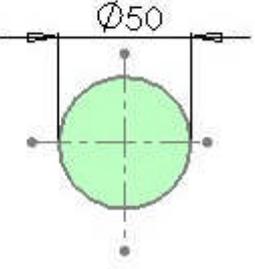
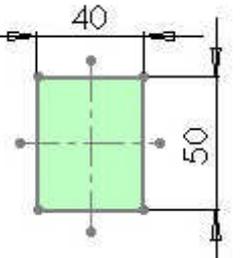
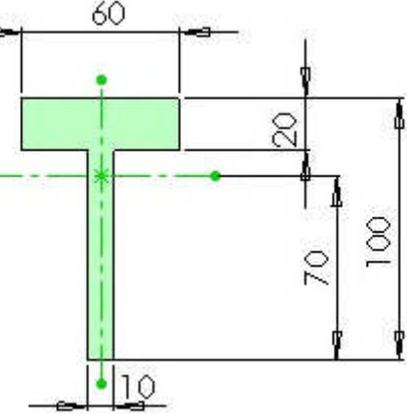
- Calculer le moment quadratique I_0 s'il n'est pas donné,

Section circulaire	Section rectangulaire	Section en T $I_0 = 2033333 \text{ mm}^4$
---------------------------	------------------------------	---

- Calculer la valeur de cette contrainte tangentielle en fonction de ρ .

Section circulaire	Section rectangulaire	Section en T
---------------------------	------------------------------	---------------------

- Calculer la contrainte maximale et indiquer au stylo rouge, le où les lieux de cette contrainte

<p>Section circulaire</p> 	<p>Section rectangulaire</p> 	<p>Section en T</p> 
---	--	---

3. ELEMENTS VECTORIELS

En mécanique, les éléments vectoriels sont utilisés pour représenter :

- les actions mécaniques
 - les actions $\vec{A}, \vec{A}_{0/1}$
 - les moments $\vec{M}, \vec{M}_B(\vec{A}_{0/1}), \vec{M}_{B0/1}$
- les vitesses $\vec{V}, \vec{V}_{0/1}$
- les accélérations $\vec{a}, \vec{a}_{A0/1}$

3.1. VECTEURS

1) Vecteur lié - bipoint :

On appelle *bipoint* AB ou (A, B) l'ensemble ordonné des deux points A et B pris dans cet ordre.

On appelle *norme du bipoint* AB, la valeur absolue qui définit la longueur du segment [AB] ; on note $\|AB\|$ ou AB

Le bipoint AB peut être défini géométriquement par:

- Son origine : A;
- Son support: la droite $x'x$;
- Son sens de A vers B;
- Sa norme $\|AB\|$.

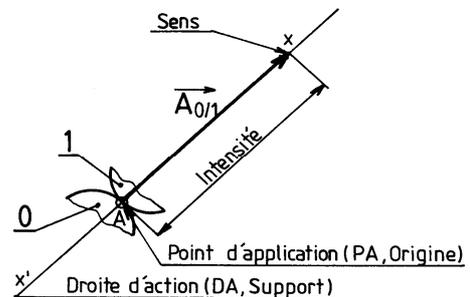
Il existe un seul représentant unique

2) Vecteur glissant

On appelle vecteur $\vec{A}_{0/1}$ la classe d'équivalence des bipoints équipollents dont le bipoint $\vec{A}_{0/1}$ est un représentant. Fig.4

Le vecteur $\vec{A}_{0/1}$ peut être défini géométriquement par:

- Son origine : A
- Son support : la droite $x'x$;
- Son sens de A vers x
- Sa norme (intensité) $\|\vec{A}_{0/1}\|$ ou $A_{0/1}$



Unité : le Newton (N)

Figure.5

Il existe une infinité de vecteurs sur $x'x$

3) Vecteur libre

Il existe une infinité de vecteurs sur $x'x$

4) Vecteur libre

On appelle vecteur libre le vecteur défini comme suit :

- Son support
- Son sens
- Sa norme

Il existe une infinité de vecteurs libres

5) Expression graphique d'un vecteur : on représentera un bipoint

6) Notion de base orthonormée

Une base orthonormée est constituée de trois vecteurs ayant la même origine, perpendiculaires entre eux et de norme (longueur) unitaire $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\| = \|\vec{z}\| = 1$

Rappel : la norme d'un vecteur est sa longueur.

$$\vec{u} = \begin{matrix} | & x_1 \\ | & y_1 \\ | & z_1 \\ \text{R} & \end{matrix} \Rightarrow$$

$$\text{Notation de la base : } \|\vec{u}\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \quad \left(\begin{matrix} \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \end{matrix} \right)$$

Représentation

On trace les deux premiers vecteurs \vec{x}, \vec{y} qui forme le plan (\vec{x}, \vec{y}) . On trace le 3ème vecteurs \vec{z} perpendiculairement au plan (\vec{x}, \vec{y}) et dont le sens est déterminé par la règle :
- des trois doigts
- du tire-bouchon

7) Repère orthonormé

Un repère est constitué :

- d'une base
- d'un point donné, origine du repère.

$$\text{Notation : } \text{R} \left(\text{O}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \right)$$

7) Expression analytique d'un vecteur : figure.6

Les composantes d'un vecteur \vec{V} sont des grandeurs mathématiques réelles correspondant au normes des vecteurs composantes ($\vec{V}_x, \vec{V}_y, \vec{V}_z$) précédées du signe donné par l'orientation des axes du repère.

- composante dans le même sens que l'axe du repère = signe +
- composante dans le sens opposé de l'axe du repère = signe -

V_x : composante de \vec{V} sur l'axe x

V_y : composante de \vec{V} sur l'axe y

V_z : composante de \vec{V} sur l'axe z

$$\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} + V_z \cdot \vec{k}$$

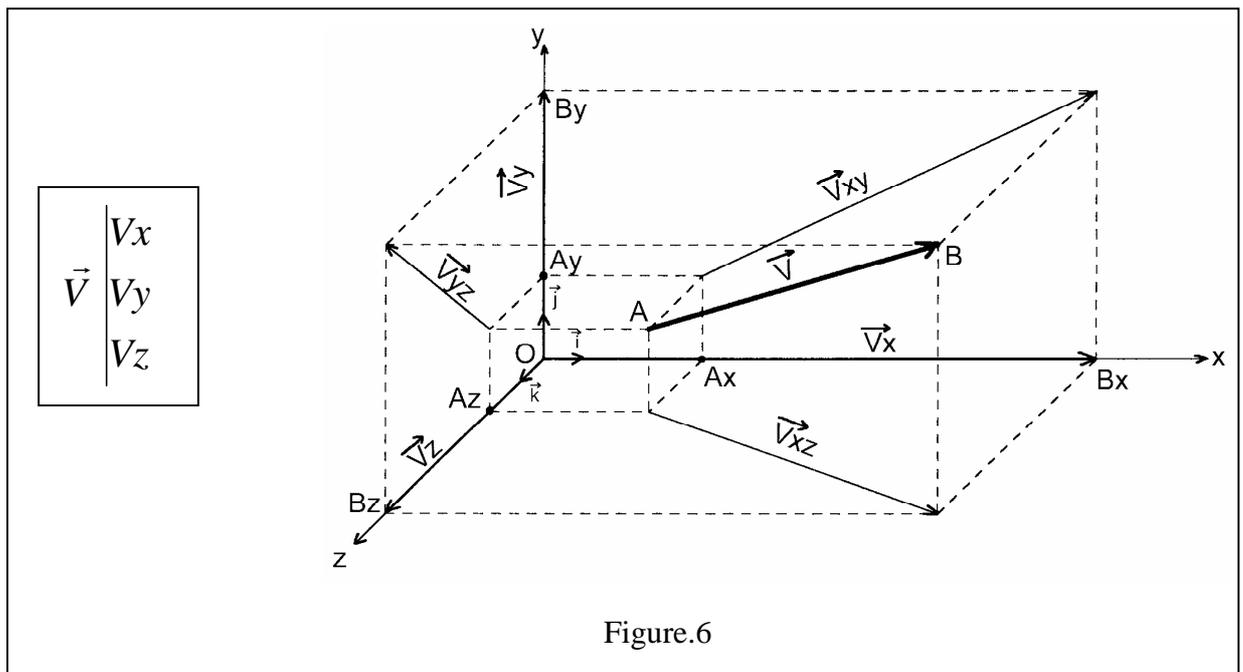
$$\vec{V} \begin{vmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{vmatrix}$$

V_x : composante de \vec{V} sur l'axe x

V_y : composante de \vec{V} sur l'axe y

V_z : composante de \vec{V} sur l'axe z

$$\vec{V} = V_x \cdot \vec{i} + V_y \cdot \vec{j} + V_z \cdot \vec{k}$$



$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont les vecteurs unitaires du repère orthonormé $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

8) Calcul des composantes d'un vecteur figure.7

- par projection sur les axes

$\vec{V}_x =$ projection de \vec{V} sur l'axe x

$\vec{V}_y =$ projection de \vec{V} sur l'axe y

$$V_x = V \cdot \cos \alpha$$

$$V_y = V \cdot \sin \alpha$$

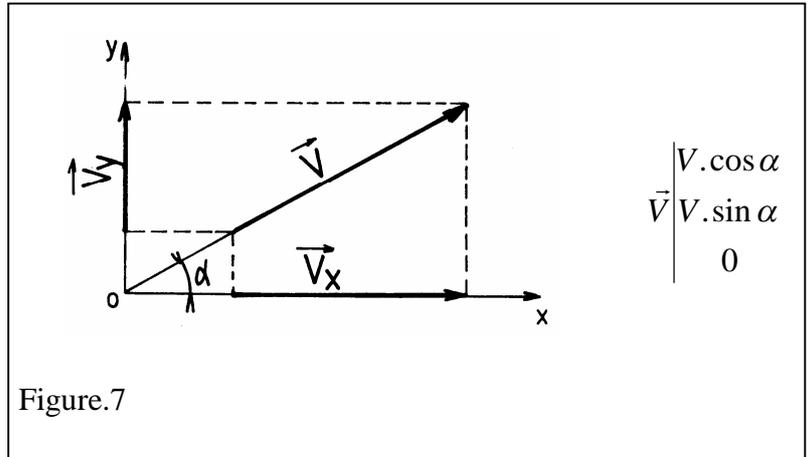


Figure.7

- coordonnées des points extrêmes

Soient les coordonnées des points suivants : A $\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix}$ et

$$B \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} \begin{pmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \\ Z_B - Z_A \end{pmatrix}$$

correspondant respectivement à l'origine et l'extrémité du vecteur \vec{V} dans le repère $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

9) Norme d'un vecteur

La norme d'un vecteur est sa « valeur » mathématique dans son repère. Elle est notée $\|\vec{V}\|$ ou V telle que :

$$\text{Pour } \vec{V} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$$

Interprétation graphique :

La norme d'un vecteur sera définie grâce à la longueur du vecteur et à l'échelle des forces

10) Opérations figure.8

Addition géométrique de ve

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$$

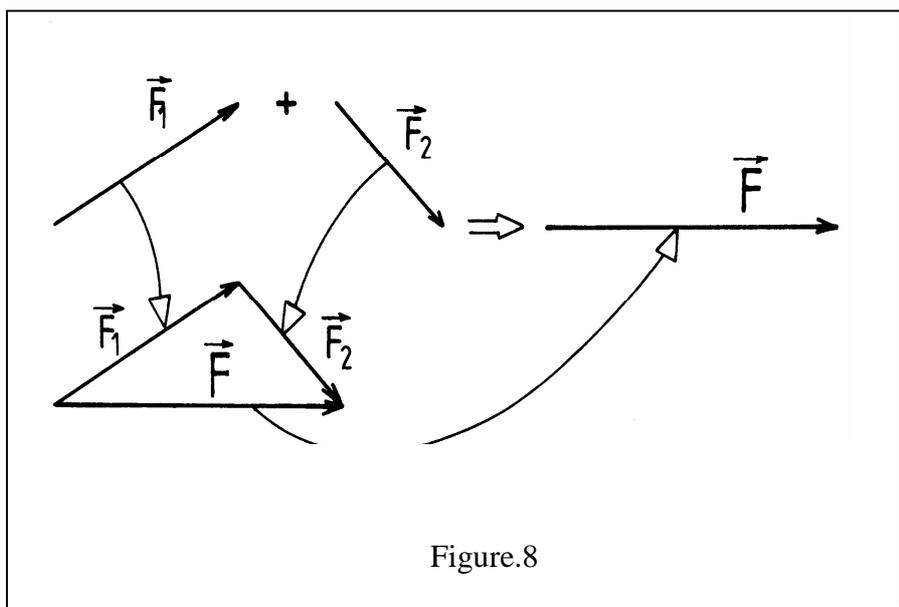


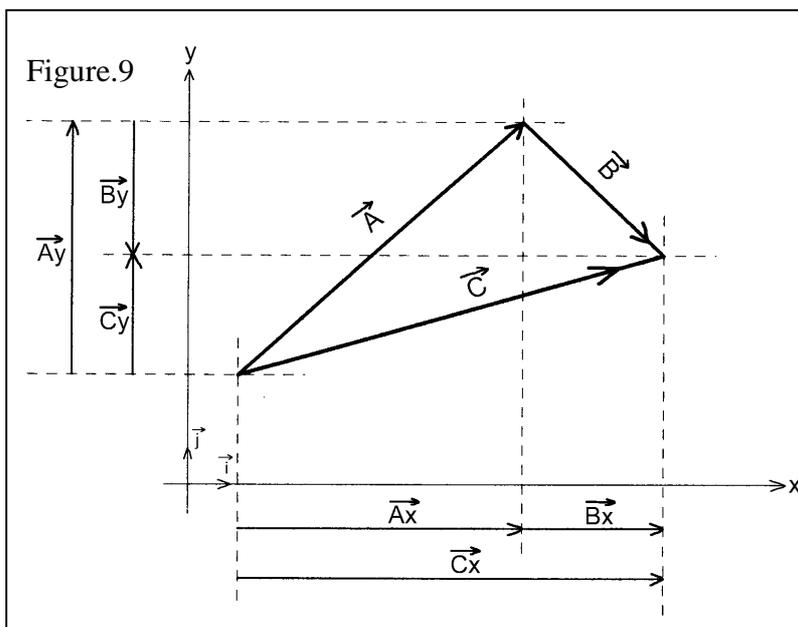
Figure.8

Addition analytique de vecteurs figure.9

Soient 2 vecteurs \vec{A} et \vec{B}
définis dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$:

$$\vec{A} \begin{vmatrix} Ax \\ Ay \\ Az \end{vmatrix} \quad \vec{B} \begin{vmatrix} Bx \\ By \\ Bz \end{vmatrix}$$

Le vecteur \vec{C}
représente la somme :
 $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$ et se définit
comme suit : Figure.9



$$\vec{C} \begin{cases} C_x \\ C_y \\ C_z \end{cases} \text{ avec}$$

$$C_x = A_x + B_x$$

$$C_y = A_y + B_y$$

$$C_z = A_z + B_z$$

La somme analytique de vecteurs se résume à la somme des composantes.

La soustraction se résume à une addition en appliquant la méthode :

$$\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = \vec{F}_1 + (-\vec{F}_2) = \vec{F}$$

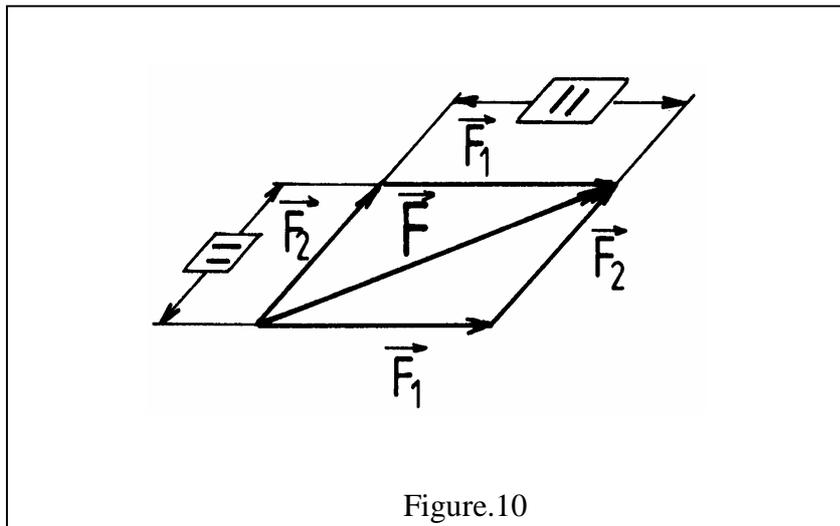


Figure.10

Propriétés l'addition est commutative

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_1 = \vec{F}$$

L'addition peut être réalisée à partir d'un parallélogramme (règle du parallélogramme)

- l'addition est associatif

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) + \vec{F}_3 = \vec{F}_1 + (\vec{F}_2 + \vec{F}_3) = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

- élément neutre

vecteur nul : $\vec{0} : \boxed{\vec{F} + \vec{0} = \vec{F}}$

Multiplication par un scalaire

Soient \vec{V} et $\lambda \in \mathbb{R}$. $\vec{V} \cdot \lambda$ est un vecteur \vec{W} tel que :

- \vec{W} a la même direction que \vec{V}
- si $\lambda \geq 0$, \vec{W} à le même sens que \vec{V} , contrairement si λ est négatif
- norme : $\|\vec{W}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{V}\|$

11) Notion de résultante

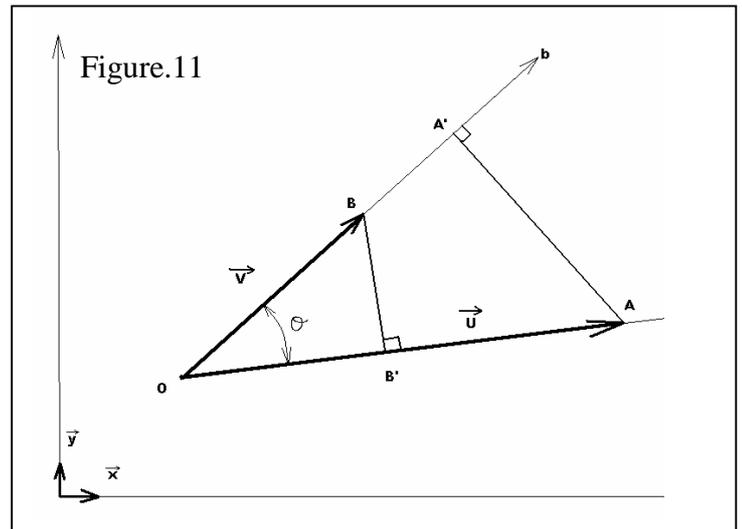
On appelle résultante d'un système d'actions $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, le vecteur \vec{F} défini par la relation :

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n}$$

12) Produit scalaire

Soit le vecteur \vec{U} représenté par le bipoint (OA) et le vecteur \vec{V} représenté par le bipoint (OB) dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

Figure.11



Soit B' l'image de B par projection orthogonale sur l'axe a

Soit A' l'image de A par projection orthogonale sur l'axe b

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot \cos \theta = \vec{V} \cdot \vec{U}$$

Le produit scalaire $\vec{U} \cdot \vec{V}$ est le réel $\overline{OA} \times \overline{OB'}$

Le produit scalaire $\vec{V} \cdot \vec{U}$ est le réel $\overline{OA'} \times \overline{OB}$

Propriétés :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$$

$$\vec{U} \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{U} \cdot \vec{V}_1 + \vec{U} \cdot \vec{V}_2$$

$$(b \cdot \vec{U}) \cdot \vec{V} = b(\vec{U} \cdot \vec{V})$$

Le produit scalaire du vecteur \vec{A} par le vecteur \vec{B} noté $\vec{A} \cdot \vec{B}$ est égal au produit des modules (normes) des deux vecteurs multiplié par le cosinus de l'angle θ entre leurs directions respectives.

Conséquence :

Si $\theta = 90$, alors $\cos 90 = 0$ donc le produit scalaire de deux vecteurs est nul si ces deux vecteurs sont perpendiculaires.

Expression analytique du produit scalaire

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z$$

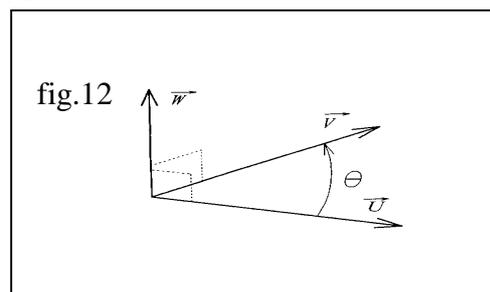
Remarque : Le produit scalaire de 2 vecteurs est un nombre réel

13) Produit vectoriel

Le produit vectoriel du vecteur \vec{U} par le vecteur \vec{V} , que l'on notera $\vec{U} \wedge \vec{V}$, est le vecteur \vec{W}

dont un représentant d'origine A est tel que :

- son support est perpendiculaire au plan (A, \vec{U}, \vec{V})
- son sens est tel que $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ soit direct
- sa norme a pour valeur :



$$\|\vec{W}\| = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{V}\| \cdot |\sin(\vec{U}, \vec{V})|$$

Propriétés :

- *nullité* : si un des vecteurs = 0 ou si les vecteurs sont colinéaires
- *antisymétrie* : $\vec{U} \wedge \vec{V} = -(\vec{V} \wedge \vec{U})$

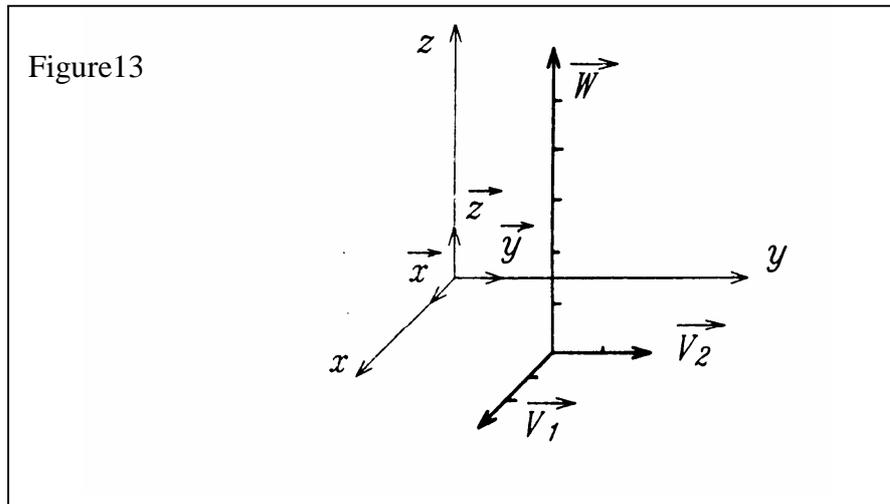
Expression analytique

Dans une base orthonormé directe $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, on donne : $\vec{V}_1(x_1, y_1, z_1)$ et $\vec{V}_2(x_2, y_2, z_2)$.

Le produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ s'exprime par

figure.13

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{x} + (z_1 x_2 - x_1 z_2) \vec{y} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{z}$$



14) Notion de torseur

On appelle torseur l'ensemble défini dans un repère orthonormé :

- d'un vecteur noté \vec{R} appelé résultante du torseur $\{T\}$
- d'un champs vectoriel noté \vec{M} et vérifiant la condition : $\vec{M}_A = \vec{M}_B + \vec{AB} \wedge \vec{R}$

\vec{M}_A est appelé le moment du torseur $\{T\}$ au point A

\vec{R} et \vec{M}_A sont les éléments de réduction du torseur $\{T\}$ au point A

$${}_A\{T\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_A = \vec{AB} \wedge \vec{R} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \begin{array}{l} L_A \\ M_A \\ N_A \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\vec{R} = X \vec{x} + Y \vec{y} + Z \vec{z} \quad :$$

X, Y, Z sont les composantes de \vec{R} dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\vec{M}_A = L_A \vec{x} + M_A \vec{y} + N_A \vec{z} \quad :$$

L_A, M_A, N_A sont les composantes de \vec{M}_A dans $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ au point A

\vec{R} est appelé résultante du torseur

\vec{M}_A est appelé le moment au point A du torseur

15) Changement de centre de réduction du torseur

Soit ${}_A\{T\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\}$, les éléments de réduction en A du torseur, les éléments de réduction en B du

même torseur s'exprime par : ${}_B\{T\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_B \end{array} \right\}$ tel que :

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$

$${}_A\{T\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_A \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \begin{array}{l} L_A \\ M_A \\ N_A \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_B \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array} \begin{array}{l} L_B \\ M_B \\ N_B \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Cas particuliers

Torseur nul : ${}_A\{T\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_A = \vec{0} \end{array} \right\} = \{0\}$

Glisseur : ${}_A\{T\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_A = \vec{0} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R} \\ \vec{M}_B = \vec{0} + \vec{BA} \wedge \vec{R} \end{array} \right\}$

Un torseur glisseur est un torseur dont l'invariant scalaire est nul : $\vec{R} \cdot \vec{M}_B = 0$ donc la résultante est \perp au moment

$$\text{Torseur couple : } {}_A\{T\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_A \end{Bmatrix} = {}_B\{T\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} = \vec{0} \\ \vec{M}_A = \vec{M}_B \end{Bmatrix} \forall B$$

15) Opération sur les torseurs

On ne peut procéder à des opérations sur les torseurs que s'ils sont définis au même point

Somme de torseurs

$$\{T_i\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_i \\ \vec{M}_{Ai} \end{Bmatrix} \text{ avec } i = 1 \dots n \quad \{T\} = \sum_{i=1}^n \{T_i\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{R}_i \\ \vec{M}_A = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{Ai} \end{Bmatrix}$$

exemple :

$${}_A\{T_1\} + {}_A\{T_2\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 \\ \vec{M}_{A1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{A2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{A1} + \vec{M}_{A2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_1 + \vec{R}_2 \\ \vec{M}_{A1} + \vec{M}_{B2} + \vec{AB} \wedge \vec{R}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 + X_2 & L_{A1} + L_{A2} \\ Y_1 + Y_2 & M_{A1} + M_{A2} \\ Z_1 + Z_2 & N_{A1} + N_{A2} \end{Bmatrix}_{(x,y,z)}$$

4. MODELISATION DES ACTIONS MECANIQUES

4.1. Définition d'une action mécanique

D'une façon générale, on appelle **action mécanique** toute cause physique susceptible :

- de maintenir un corps au repos,
- de créer, de maintenir ou de modifier un mouvement,
- de déformer un corps.

4.2. Classification des actions mécaniques

Les actions mécaniques sont classées en deux familles:

- Les **actions mécaniques à distance** (champ de pesanteur, champ magnétique)
- Les **actions mécaniques de contact** (dans les liaisons mécaniques)

Un ensemble de corps étant défini (isolement), on distingue les actions mécaniques **extérieures** des actions mécaniques **intérieures** à cet ensemble. Figure.14

Soient trois solides S_1 , S_2 et S_3 .

Soit E l'ensemble constitué par les corps S_1 et S_2 :

$E = \{ S_1, S_2 \}$.

Le bilan des **actions mécaniques extérieures** qui agissent sur l'ensemble E s'établit ainsi:

- Poids de l'ensemble E (Action Mécanique à distance : Poids de S_1 et S_2).
- Actions mécaniques de contact exercées par S_3 sur l'ensemble E aux points A , C et D (Actions Mécaniques de contact).

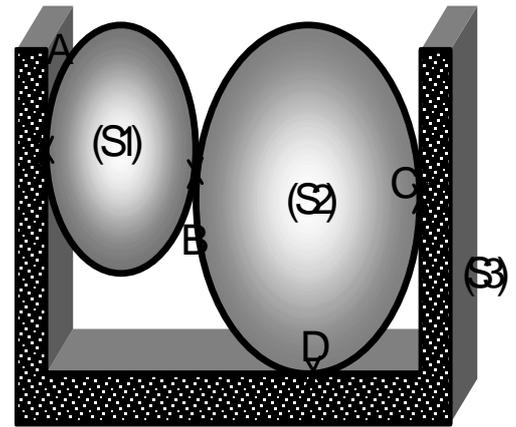


Figure.14

4.3. Force, Moment et Couple

4.3.1 Notion de force figure.15

On appelle **force**, l'action mécanique (attraction ou répulsion) qui s'exerce mutuellement entre deux solides. Ces deux solides ne sont pas obligatoirement en contact.

Une force s'applique en un **point**. L'action mécanique exercée par une force sur une pièce dépend de :

- l'**intensité de la force**,
- la **direction de la force**,
- du **sens de la force**.

L'entité mathématique « **Vecteur** » est, lui, aussi caractérisé par sa Norme, sa Direction et son Sens.

Une force sera donc modélisée par un vecteur, associé à un Point d'application

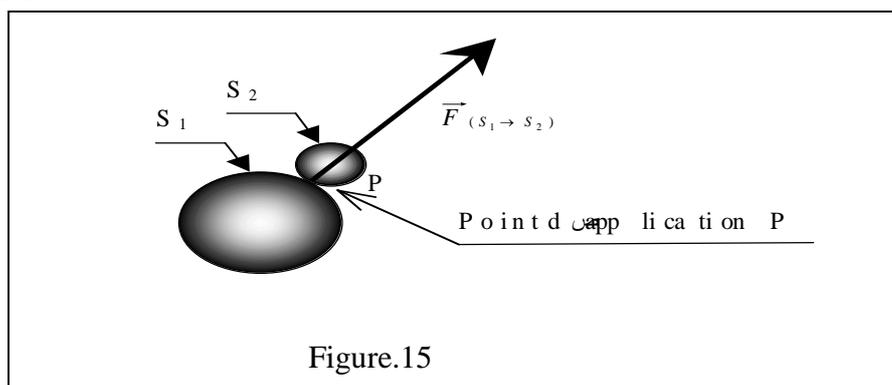


Figure.15

Unité : Une force s'exprime en Newton

Notation : $\vec{F}_{(S_1 \rightarrow S_2)}$

Ordre de grandeur : Une personne de masse 70 Kg a un poids d'environ 700 N, soit, 70 daN.

4.3.2 Notion de moment

4.3.2.1 Moment d'une force par rapport à un point figure.16

Considérons un utilisateur qui souhaite, à l'aide d'une clé, fixer la jante d'un véhicule automobile.

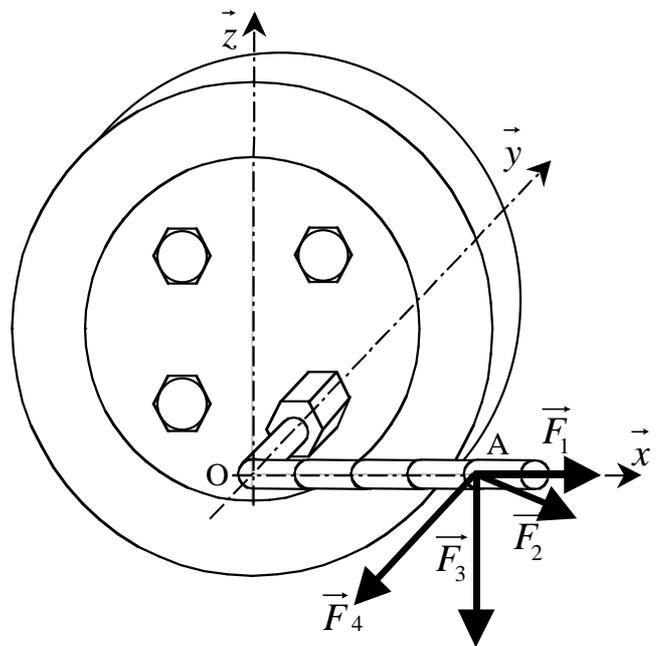
Il positionne sa main au point A.

Puis il commence par exercer une force \vec{F}_1 intégralement portée par \vec{x} . Malgré sa bonne volonté, il n'arrive pas à obtenir le serrage de la vis.

Il décide, alors, d'incliner légèrement son action mécanique pour obtenir la force \vec{F}_2 portée par \vec{x} et $-\vec{z}$. Le serrage semble s'amorcer.

Finalement il exerce une force \vec{F}_3 intégralement portée par $-\vec{z}$. Son action mécanique semble être efficace... Pour retirer sa clé, il exercera une force \vec{F}_4 intégralement portée par $-\vec{y}$

Figure.16



L'exemple précédent montre que les effets physiques d'une A.M. dépendent de la position du point d'application et de l'orientation dans l'espace (direction et sens) de la force \vec{F} associée à cette A.M.

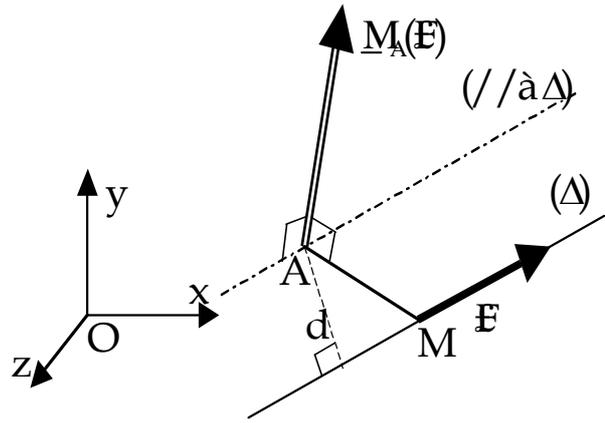
Nous sommes donc conduits à introduire la notion **de moment de la force \vec{F} par rapport à un point** pour caractériser complètement l'A.M. Figure.17

On appelle **moment par rapport au point A de la force** \vec{F} appliquée au point M, le vecteur d'origine A défini par la relation :

$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AM} \wedge \vec{F}$$

Unité : Newton mètre (N.m)

Figure.17



Ce vecteur moment $\vec{M}_A(\vec{F})$ sera représenté par une double flèche. Il possède les caractéristiques suivantes :

- Une origine : Le point A
- Une direction : perpendiculaire au plan formé par les vecteurs \vec{AM} et \vec{F} .
- Un sens : Le trièdre $(\vec{AM}, \vec{F}, \vec{M}_A(\vec{F}))$ est direct.
- Une norme : $\|\vec{M}_A(\vec{F})\| = \|\vec{AM}\| \cdot \|\vec{F}\| \cdot |\sin(\vec{AM}, \vec{F})|$

Exercice 1

Considérons la force $\vec{F}_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix}$ appliquée au point A $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ et la la force $\vec{F}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ appliquée au point B $\begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Les forces sont exprimées en Newtons et les longueurs en millimètres.

☞ Calculez, par la méthode de votre choix, les moments par rapport au point O, origine du repère, de ces deux forces.

Exercice 2

Une balançoire 3 est articulée en O (liaison pivot) sur un socle fixe 0. \vec{P}_1 et \vec{P}_2 représentent les poids respectifs des deux enfants 1 et 2, appliqués respectivement en H₁ et H₂.

On souhaite calculer les moments par rapport au point O de \vec{P}_1 et de \vec{P}_2 pour, ensuite, les comparer.

☞ Quelle est la méthode de calcul de moments que vous préconisez? Justifiez votre réponse.

☞ Déterminez **littéralement**, les moments par rapport au point O des poids \vec{P}_1 et \vec{P}_2 .

☞ Déterminez **numériquement**, les moments en O des poids \vec{P}_1 et de \vec{P}_2 . Vous prendrez

$$\|\vec{P}_1\| = 29 \text{ daN}, \|\vec{P}_2\| = 32 \text{ daN}, a = 2 \text{ m et } b = 1,8 \text{ m.}$$

☞ Comparez ces deux moments et concluez. Figure.18

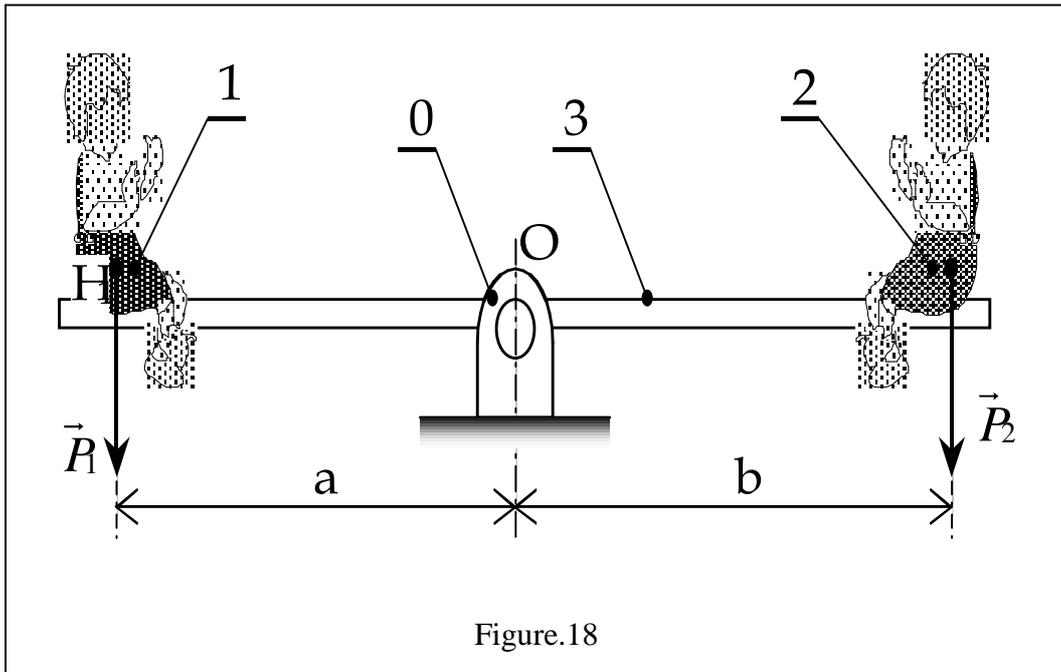


Figure.18

Exercice 3

Une balance romaine figure.19 se compose d'un balancier 2 articulé en O sur le crochet de fixation 1, et d'une masse d'équilibrage 3 dont la position est réglable sur le balancier. La charge à peser 4 est accrochée en B. La pesée est effectuée en déplaçant la masse d'équilibrage 3.

☞ En supposant que le $\vec{M}_O(\vec{P}) + \vec{M}_O(\vec{P}_{me}) = \vec{0}$, **exprimez la relation** d'équilibre entre P et les autres paramètres du problème.

☞ Déterminez, **numériquement**, le poids P mesuré. Pour ce faire, vous prendrez $\|\vec{P}_{me}\| = 5 \text{ daN}$, $a = 700 \text{ mm}$ et $b = 100 \text{ mm}$. Déduisez-en la masse M de la charge accrochée.

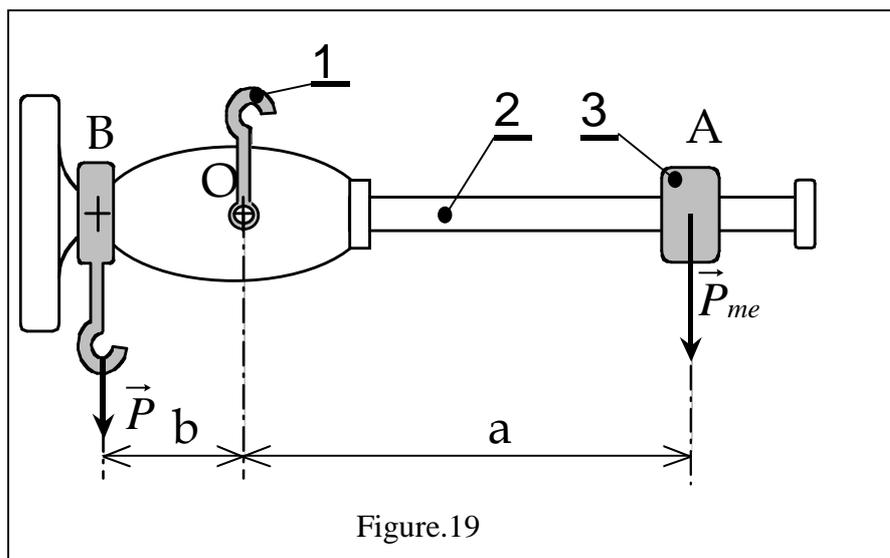
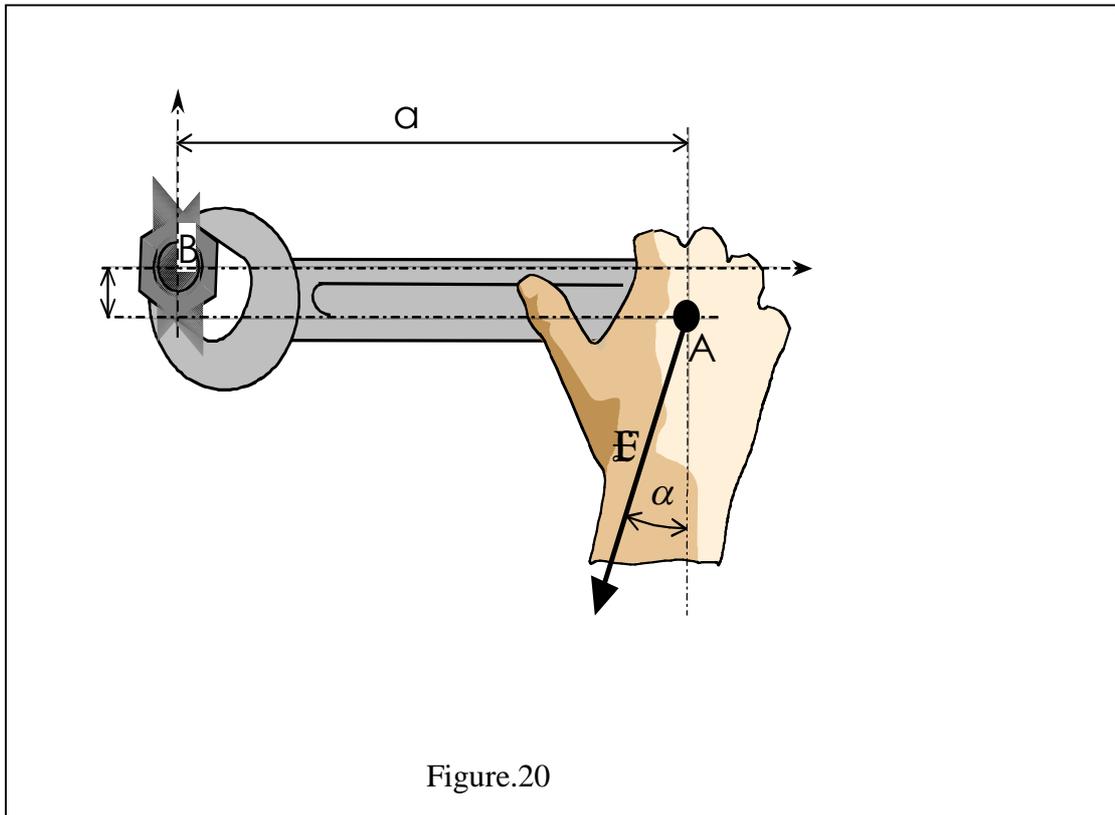


Figure.19

Exercice 4 figure.20

La force \vec{F} appliquée en A, modélise l'action mécanique exercée par l'utilisateur sur la clef.

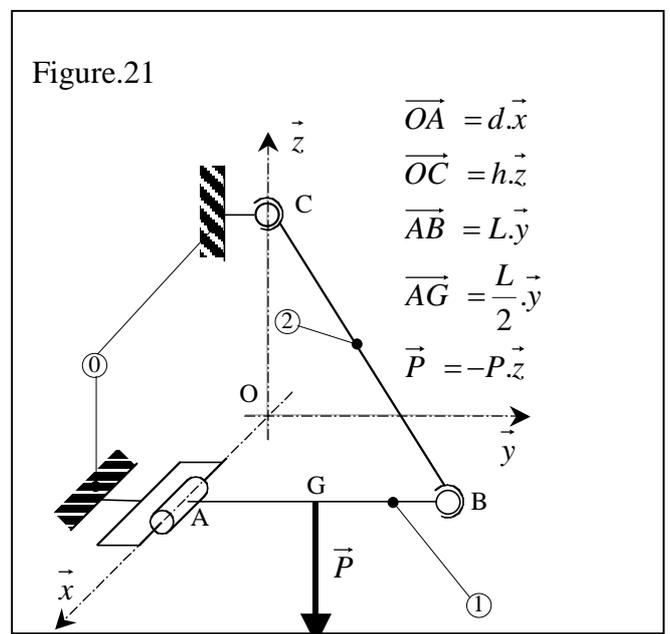
- ☞ Déterminez, **littéralement**, par un calcul vectoriel, le moment $\vec{M}_B(\vec{F})$.
- ☞ Déterminez, **littéralement**, le moment $\vec{M}_B(\vec{F})$ en utilisant la "formule du bras de levier".
- ☞ Déterminez, **numériquement**, le moment $\vec{M}_B(\vec{F})$. Pour ce faire, vous prendrez: $\|\vec{F}\| = 150 \text{ N}$, $a=125$, $b=14$ et $\alpha = 30^\circ$.



Exercice 5 figure.21

Nous souhaitons amorcer l'étude de l'équilibre du **portique** représenté ci-contre.

- ☞ Déterminez, **littéralement**, le moment $\vec{M}_A(\vec{P})$.
- ☞ Déterminez, **littéralement**, le moment $\vec{M}_B(\vec{P})$.
- ☞ Déterminez, **littéralement**, le moment $\vec{M}_C(\vec{P})$.
- ☞ Déterminez, **littéralement**, le moment $\vec{M}_O(\vec{P})$.

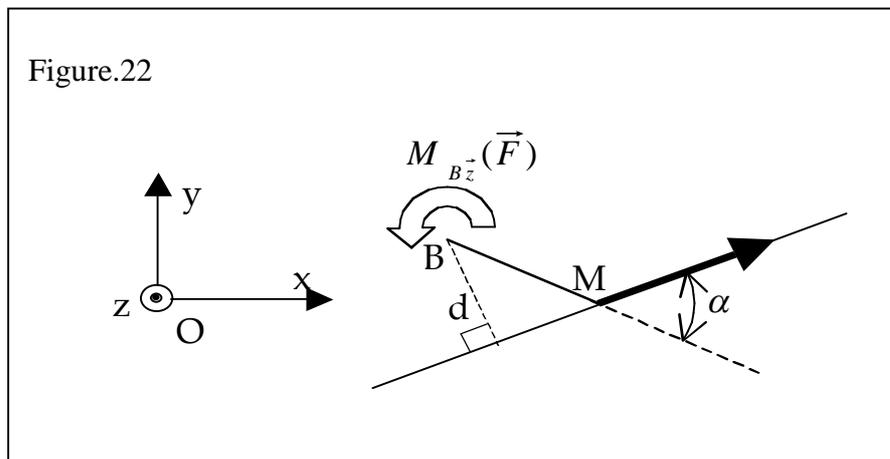


4.3.2.2 Application aux problèmes Plans

Lorsque nous étudions un problème plan, les vecteurs moments sont nécessairement portés par l'axe perpendiculaire au plan d'étude. Nous introduisons donc la notion de **moment d'une force par rapport à un axe** : $M_{O_z}(\vec{F})$. Il est judicieux d'utiliser la relation dite du « **Bras de Levier** ». En effet, moyennant l'utilisation d'un peu de trigonométrie, il est aisé de déterminer la longueur d . figure.22

$$M_{B_z}(\vec{F}) = +d \cdot \|\vec{F}\|$$

La longueur d sera affectée d'un signe plus (+) si la force tend à faire tourner le système dans le sens positif, du signe moins (-) dans le cas contraire. C'est donc une grandeur algébrique.



4.3.2.3 Relation fondamentale entre les moments

Soit une force \vec{F} appliquée au point M, et deux points quelconques A et B.

$$\text{Par définition, } \vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AM} \wedge \vec{F} \text{ et } \vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{BM} \wedge \vec{F}$$

$$\text{D'après le relation de Chasles } \vec{BM} = \vec{BA} + \vec{AM}$$

$$\text{D'où } \vec{M}_B(\vec{F}) = (\vec{BA} + \vec{AM}) \wedge \vec{F}$$

$$\text{Soit } \vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{BA} \wedge \vec{F} + \vec{AM} \wedge \vec{F}$$

$$\text{Finalement } \vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{M}_A(\vec{F}) + \vec{BA} \wedge \vec{F}$$

☞ Cette relation est **fondamentale**

4.3.3 Notion de Couple

Notre opérateur souhaite desserrer la vis bloquée installée sur la jante. Après avoir utilisé le premier modèle de clé sans grande réussite, il préfère utiliser un modèle de type « croix ». Il pose ses mains en A et en B et exerce deux forces \vec{F}_A et \vec{F}_B telles que :

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B = \vec{F} = F \cdot \vec{z}$$

Un rapide calcul lui donne les moments par rapport au point O de ces deux forces: figure.23

$$\vec{M}_O(\vec{F}_A) = -F \cdot \frac{L}{2} \cdot \vec{y} \text{ et } \vec{M}_O(\vec{F}_B) = -F \cdot \frac{L}{2} \cdot \vec{y}$$

Le bilan des A.M. exercées par l'utilisateur sur la croix est composé :

- d'une résultante des forces : $\vec{F}_U = \vec{F}_A + \vec{F}_B = F \cdot \vec{z} - F \cdot \vec{z} = \vec{0}$
- d'un moment résultant par rapport au point O : $\vec{M}_O(\vec{F}_U) = \vec{M}_O(\vec{F}_A) + \vec{M}_O(\vec{F}_B) = -F \cdot L \cdot \vec{y}$

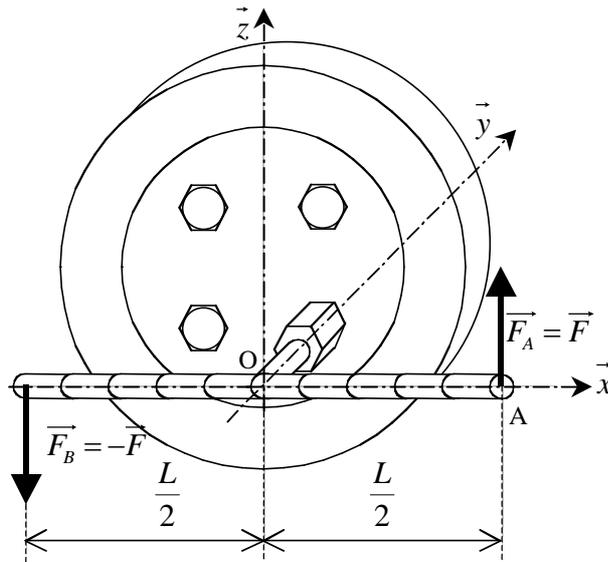
La résultante de ces deux forces est nulle. Par contre, ces mêmes deux forces génèrent un moment que l'on appellera : un **Couple**.

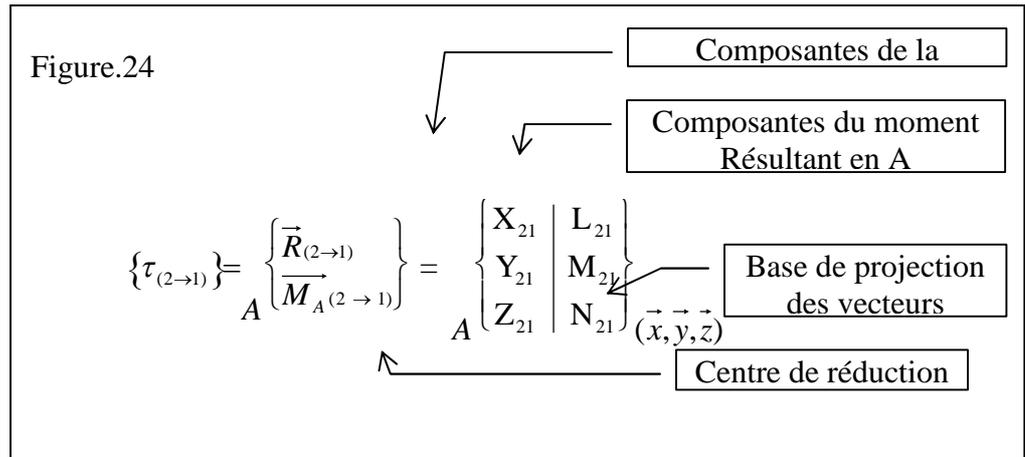
4.4. Torseur associé à une action mécanique

4.4.1 Définitions

Une A.M. est complètement définie lorsque nous connaissons les deux vecteurs \vec{F} et $\vec{M}_A(\vec{F})$. Nous allons donc regrouper ces deux vecteurs dans une entité mathématique appelée **Torseur**.

Le toseur associé à l'action mécanique exercée en A, par un solide 2 sur un solide 1 sera noté : figure.24





Remarques :

↪ Le point A est un point quelconque.

↪ $\vec{R}_{(2 \rightarrow 1)}$ et $\vec{M}_{A(2 \rightarrow 1)}$ sont appelés *éléments de réduction au point A* du torseur $\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}$.

4.4.2 Torseurs particuliers

4.4.2.1 Torseur glisseur

On appelle **torseur glisseur au point A**, tout torseur associé à une action mécanique dont le moment résultant est nul en ce point.

$$\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \neq \vec{0} \\ \vec{M}_{A(2 \rightarrow 1)} = \vec{0} \end{array} \right\}$$

4.4.2.2 Torseur couple

On appelle **torseur couple**, tout torseur associé à une action mécanique dont la résultante est nulle.

$$\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} = \vec{0} \\ \vec{M}_{A(2 \rightarrow 1)} \neq \vec{0} \end{array} \right\}$$

↪ Les éléments de réduction d'un torseur couple sont les mêmes en tout point.

4.4.3 Opérations entre torseurs

4.4.3.1 Changement de centre de réduction

Soit : $\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_{A(2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}$

Ecriture au point B : $\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}_B = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_{B(2 \rightarrow 1)} = \vec{M}_{A(2 \rightarrow 1)} + \vec{BA} \wedge \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \end{array} \right\}$

4.4.3.2 Somme de deux torseurs

$$\text{Soient : } \{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_{A(2 \rightarrow 1)} \end{Bmatrix}$$

$$\{\tau_{(3 \rightarrow 1)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(3 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_{A(3 \rightarrow 1)} \end{Bmatrix}$$

$$\text{alors : } \{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\} + \{\tau_{(3 \rightarrow 1)}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(2 \rightarrow 1)} + \vec{R}_{(3 \rightarrow 1)} \\ \vec{M}_{A(2 \rightarrow 1)} + \vec{M}_{A(3 \rightarrow 1)} \end{Bmatrix}$$

☞ Pour pouvoir **additionner des torseurs, ils doivent tous être exprimés au même centre de réduction**. Il sera parfois nécessaire de réaliser, au préalable, un changement de centre réduction.

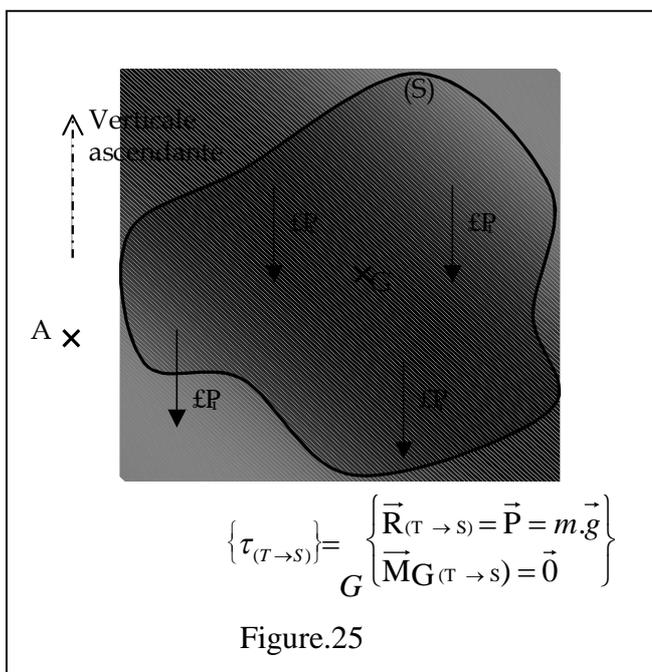
☞ Les vecteurs doivent être exprimés dans la même base.

☞ Les unités doivent être compatibles entre elles.

4.5. Actions mécaniques particulières

4.5.1 Action mécanique de Pesanteur

L'action **mécanique de Pesanteur** exercée par notre planète Terre sur un solide S de masse m, est une action mécanique à distance car elle ne résulte pas d'une liaison mécanique entre la Terre et S. figure.25



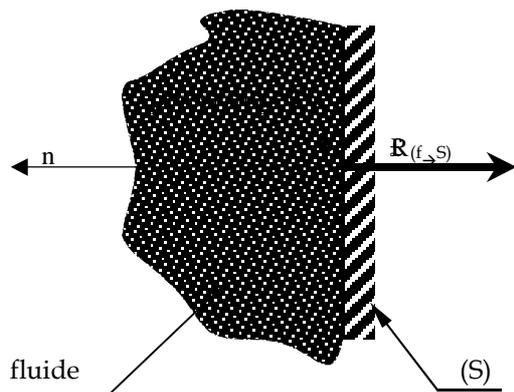
en un point quelconque A :

$$\{\tau_{(T \rightarrow S)}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{(T \rightarrow S)} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{P} \\ \vec{M}_{A(T \rightarrow S)} = \sum_{i=1}^n (\overline{AM}_i \wedge \vec{p}_i) \end{Bmatrix}$$

au centre de gravité G du solide S :

4.5.2 Action mécanique due à la pression d'un fluide sur une surface plane

Les actions mécaniques de contact d'un fluide sur une surface plane (S) se modélisent par un torseur glisseur au centre A de la surface (S) tel que : figure.26



$$\left\{ \tau_{(f \rightarrow s)} \right\}_A \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_{(f \rightarrow s)} = -p \cdot S \cdot \vec{n} \\ \vec{M}_{A(f \rightarrow s)} = \vec{0} \end{array} \right.$$

avec :

- p : pression exercée par le fluide, sur la surface (S). Le fluide est supposé à pression constante,
- S : aire de (S) ;
- n : normale à la paroi orientée vers le fluide

Figure.26

Unités légale

p en Pa

S en m²

$\|\vec{R}_{(f \rightarrow s)}\|$ en N

Autres unités :

p en MPa

S en mm²

$\|\vec{R}_{(f \rightarrow s)}\|$ en N $\|\vec{R}_{(f \rightarrow s)}\|$ en daN

Unités historiques:

p en bars

S en cm²

0,1 MPa = 10⁵ Pa = 1 bar

4.6 Torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison parfaite

Une **liaison mécanique** entre deux pièces dite **parfaite** est caractérisée par :

- Des volumes géométriquement parfaits et indéformables,
- Des ajustements sans jeu,
- Des contacts sans frottement.

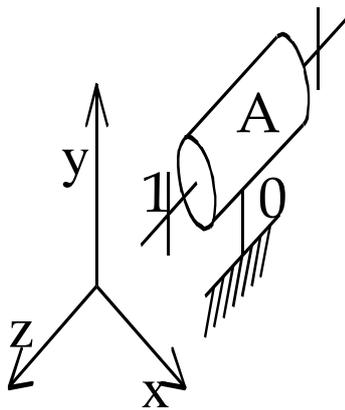
Ce modèle est certes, très théorique, mais bien pratique pour réaliser nos calculs de mécanique.

4.6.1 Méthode

☞ Une Force \vec{F} , intégralement portée par \vec{x} , ne pourra être transmise par une liaison, que si cette dernière dispose d'un « obstacle » (de la matière en contact) dans cette même direction \vec{x} , interdisant la translation d'une pièce par rapport à l'autre.

☞ Un Moment \vec{M}_A , intégralement porté par \vec{y} , ne pourra être transmis par une liaison, que si celle-ci dispose d'un « obstacle » dans cette même direction \vec{y} , interdisant la rotation d'une pièce par rapport à l'autre.

4.6.2 Application: La liaison pivot



L_{01} : Liaison pivot parfaite d'axe

(\vec{x}, \vec{z})

Mobilités

$$\begin{array}{c|c|c} \overrightarrow{Tr} & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ Rot \\ Rz \end{array} \end{array}$$

Figure.27

Torseur des actions
mécaniques
transmissibles par L_{01}

$$\left\{ \tau_{(0 \rightarrow 1)} \right\}_A \left\{ \begin{array}{cc} X_{01} & L_{01} \\ Y_{01} & M_{01} \\ Z_{01} & 0 \end{array} \right\} (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

4.7. Cas des problèmes

admettant un Plan de Symétrie

Dans certains cas, l'étude du mécanisme dans l'espace peut être délicate et longue. On recherche alors une possibilité de réduire l'étude à un problème plan, sous certaines hypothèses.

4.7.1 Hypothèses

- La surface de contact possède une géométrie qui présente une symétrie par rapport à un plan. Il devra en être de même pour les actions mécaniques extérieures.
- Nous choisissons alors un repère local dont les axes sont confondus avec les axes du plan de symétrie.

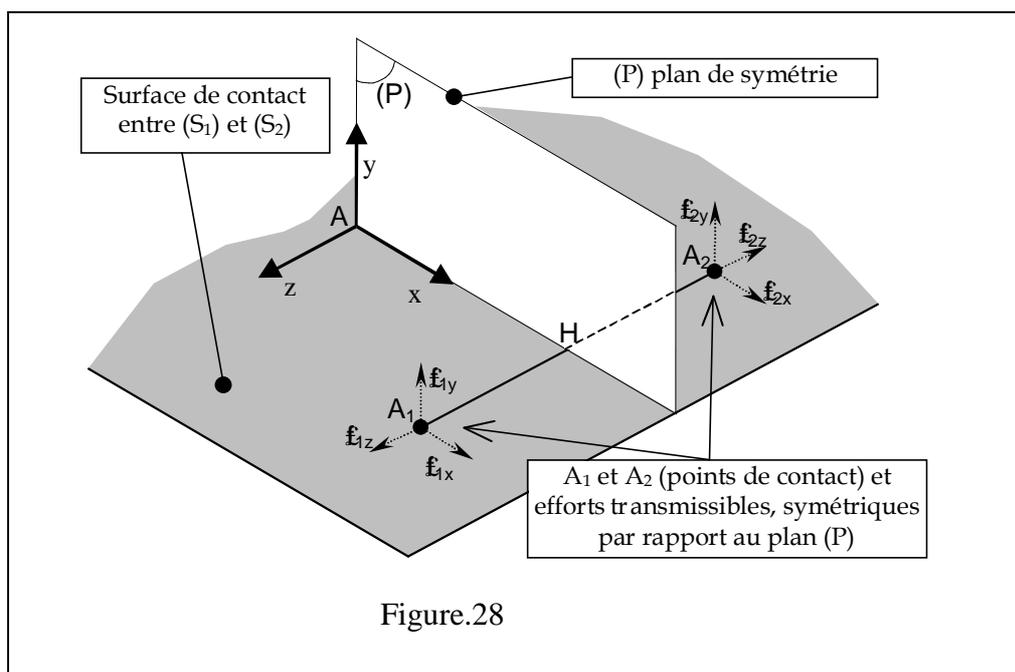


Figure.28

4.7.2 Simplification

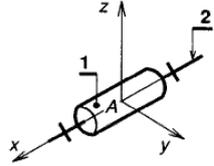
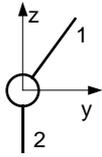
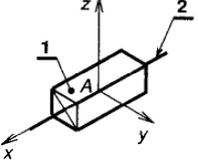
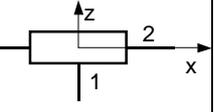
Lorsque les hypothèses précédentes sont réunies, l'écriture du torseur d'action mécanique transmissible par la liaison se simplifie. Il subsiste :

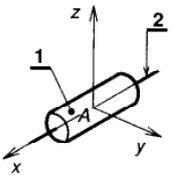
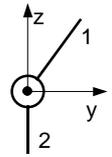
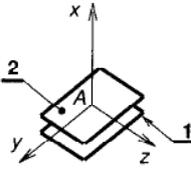
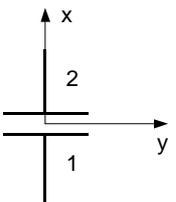
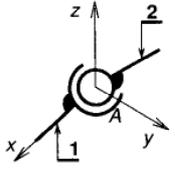
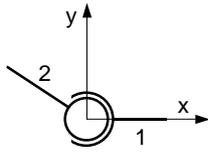
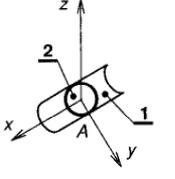
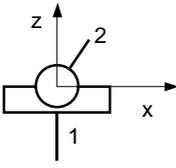
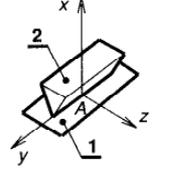
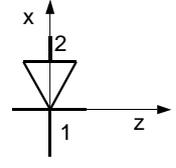
- Les composantes de la résultante contenues dans le plan de symétrie,
- La composante du moment portée par l'axe perpendiculaire au plan de symétrie .

Dans notre exemple, le plan de symétrie est (A, \vec{x}, \vec{y}) .

<p>Allure générale (3D) :</p> $\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}_A \begin{Bmatrix} X_{21} & L_{21} \\ Y_{21} & M_{21} \\ Z_{21} & N_{21} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ <p>(6 inconnues)</p>	<p>Simplification :</p> $\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}_A \begin{Bmatrix} X_{21} & \cancel{L_{21}} \\ Y_{21} & \cancel{M_{21}} \\ \cancel{Z_{21}} & N_{21} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$	<p>Allure simplifiée (2D) :</p> $\{\tau_{(2 \rightarrow 1)}\}_A \begin{Bmatrix} X_{21} & 0 \\ Y_{21} & 0 \\ 0 & N_{21} \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$ <p>(3 inconnues)</p>
---	---	--

Torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison parfaite

Désignation de la liaison	Schématisation spatiale	Mobilités	Torseur d'action mécanique transmissible	Torseur d'action mécanique Simplifié	Schématisation plane
Pivot d'axe (A, \vec{x})		$\begin{array}{c c} \overrightarrow{Tr} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \overrightarrow{Rot} & \begin{matrix} Rx \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array}$	$\begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	<p>Symétrie par rapport à (A, \vec{y}, \vec{z})</p> $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$	
Glissière d'axe (A, \vec{x})		$\begin{array}{c c} \overrightarrow{Tr} & \begin{matrix} Tx \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \overrightarrow{Rot} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \end{array}$	$\begin{Bmatrix} 0 & L_{12} \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}_A$	<p>Symétrie par rapport à (A, \vec{x}, \vec{z})</p> $\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M_{12} \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}_A$	

Pivot glissant d'axe (A, \bar{x})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} Tx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} Rx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	${}_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & M_{12} \\ Z_{12} & N_{12} \end{Bmatrix}$	Symétrie par rapport à (A, \bar{y}, \bar{z}) ${}_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}$	
Appui plan de normale (A, \bar{x})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} 0 \\ Ty \\ Tz \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} Rx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$	${}_A \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & M_{12} \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}$	Symétrie par rapport à (A, \bar{x}, \bar{y}) ${}_A \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}$	
Rotule de centre A		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} Rx \\ Ry \\ Rz \end{vmatrix}$	${}_A \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}$	Symétrie par rapport à (A, \bar{x}, \bar{y}) ${}_A \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	
Linéaire annulaire d'axe (A, \bar{x})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} Tx \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} Rx \\ Ry \\ Rz \end{vmatrix}$	${}_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{12} & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}$	Symétrie par rapport à (A, \bar{x}, \bar{z}) ${}_A \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Z_{12} & 0 \end{Bmatrix}$	
Linéaire rectiligne de normale (A, \bar{x})		$\overrightarrow{Tr} \begin{vmatrix} 0 \\ Ty \\ Tz \end{vmatrix} \quad \overrightarrow{Rot} \begin{vmatrix} Rx \\ Ry \\ 0 \end{vmatrix}$	${}_A \begin{Bmatrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & N_{12} \end{Bmatrix}$	Symétrie par rapport à (A, \bar{x}, \bar{z})	

et de contact (A, \bar{y})				$ \begin{matrix} \left\{ \begin{matrix} X_{12} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \right\} \\ A \end{matrix} $	
----------------------------------	--	--	--	--	--

NB : Le torseur des actions mécaniques transmissibles par une liaison glissière hélicoïdale n'est pas modélisable aussi simplement.

Dans le chapitre suivant, nous mettrons en place un Principe que nous utiliserons pour déterminer (entre autres) les inconnues de liaisons...

5. ELASTICITE

5.1. La déformation plastique

L'étude des propriétés mécaniques des métaux et en particulier leurs propriétés plastiques a un intérêt pratique considérable. Une grande partie de la recherche en métallurgie a pour but la mise au point d'alliages à résistance mécanique et à tonalité de plus en plus élevée. L'effort de traction à vitesse constante d'allongement permet l'étude détaillée des propriétés mécaniques de base, mais cette étude peut être complétée par des observations micrographiques, qui peuvent mettre en évidence les modes de déformation plastique, l'étape de perfection de la structure cristalline (présence de défauts cristallins).

Dans ce contexte, la théorie des dislocations joue un rôle important, car elle nous permet de prévoir quelques données essentielles de la déformation plastique. Considérons un monocristal soumis à un effort de traction (fig.29). Diverses familles de plans de glissements sont possibles pour les dislocations, les plans (111) par exemple dans la structure CFC.

Lorsque la charge de traction est assez élevée, on aura une contrainte de cisaillement maximum, qui provoquera le déplacement et la multiplication des dislocations, ce qui conduit au glissement des diverses tranches parallèles du cristal les unes par rapport aux autres (fig.30).

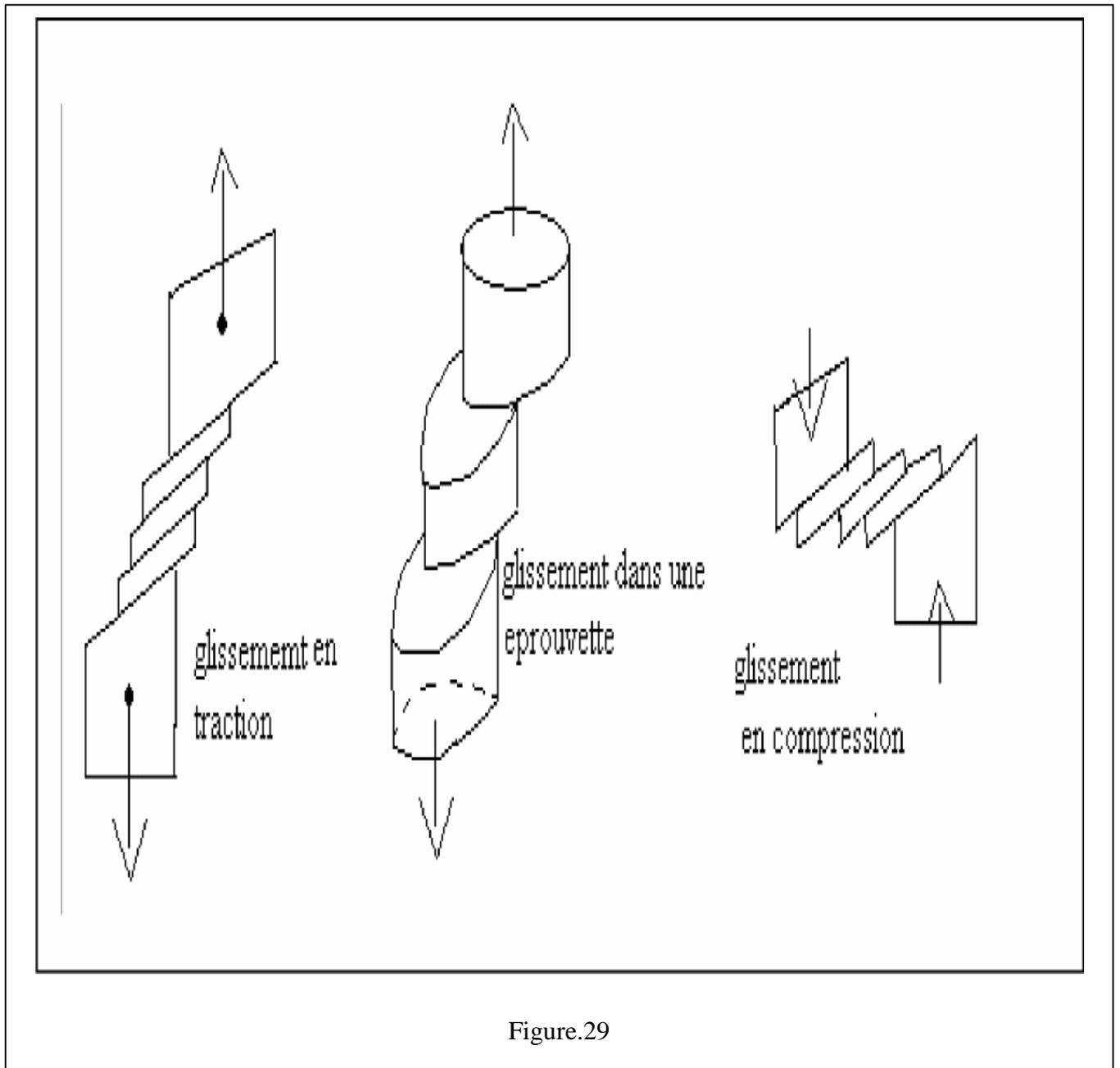


Figure.29

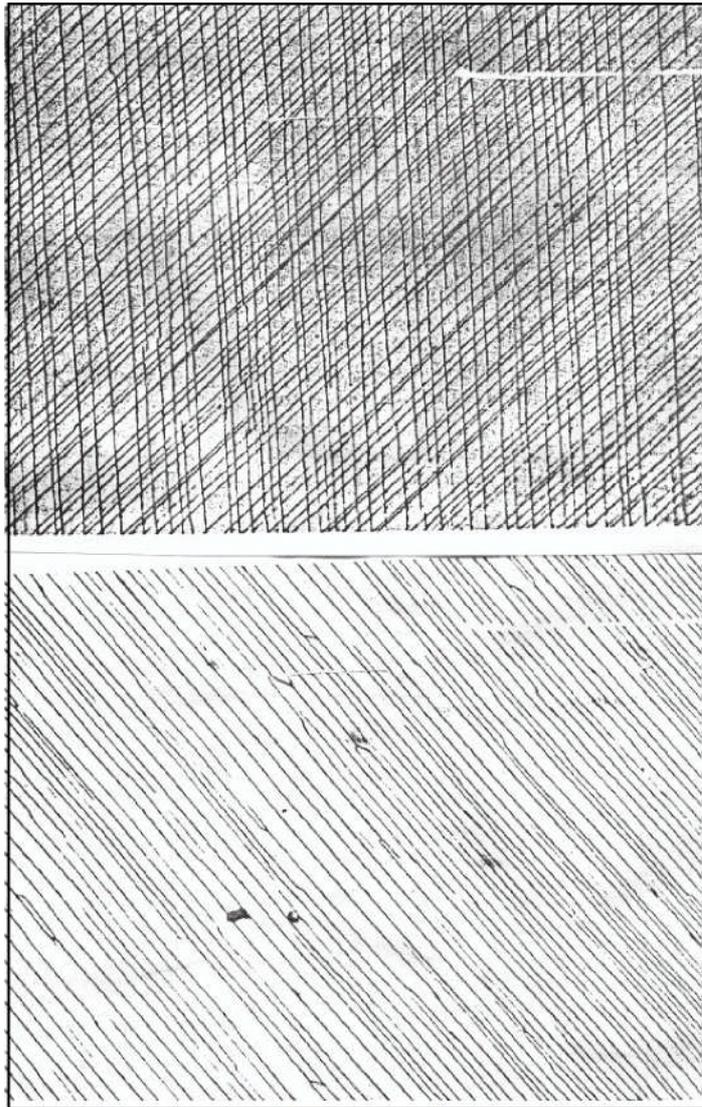


Figure.30 Lignes de glissement dans l'aluminium
micrographie optique ($\times 150$).

5.2 Aspects micrographiques de la déformation plastique

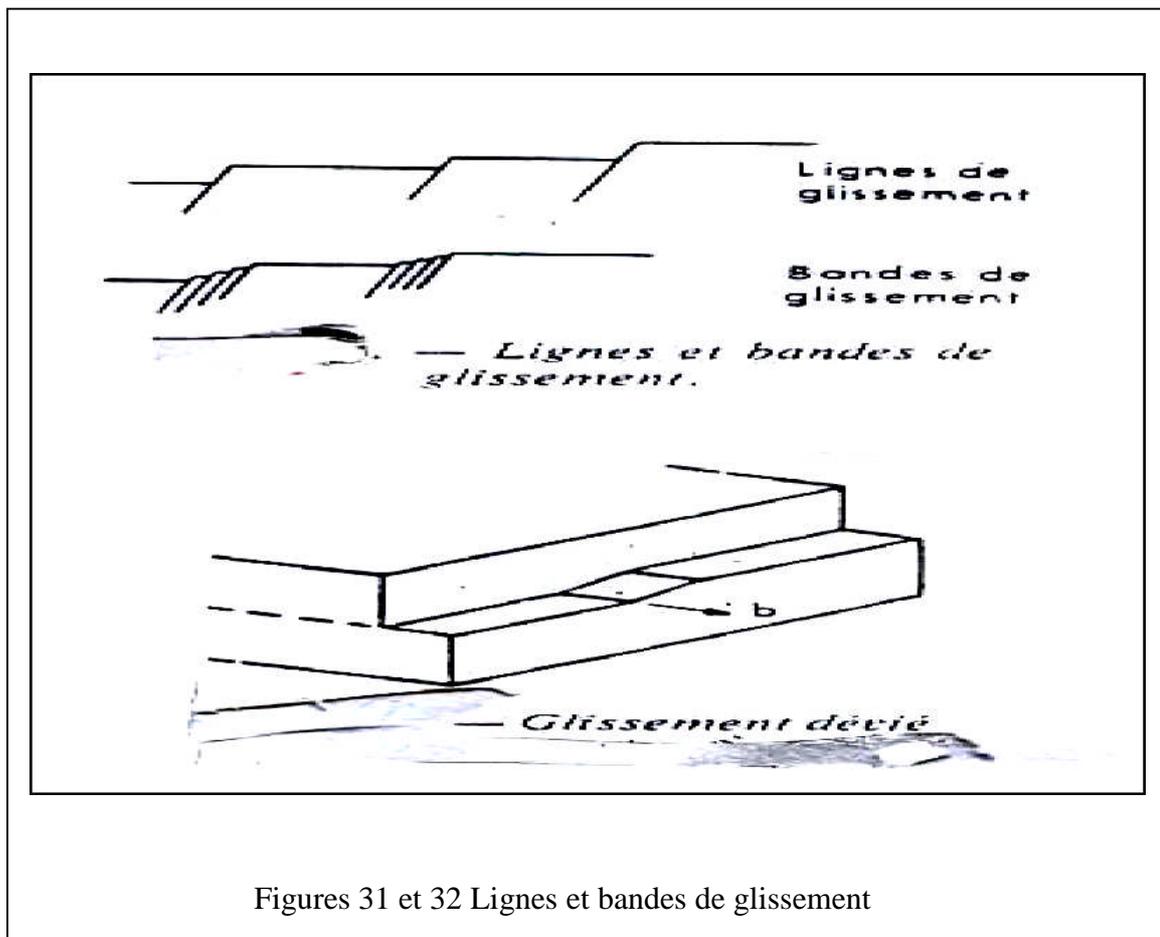
5.2.1 Glissement

La déformation plastique s'effectue essentiellement par glissement suivant le schéma de la figure 1 et plus rarement (basse température, forte vitesse) par maclage.

5.2.1.1 lignes de glissement

L'observation au microscope optique montre d'une manière générale des faisceaux de lignes parallèles sur la surface, dont le nombre croît avec la déformation plastique. Ces lignes sont en fait des marches dues au processus de glissement des dislocations. La figure 2 montre l'aspect de ces lignes sur un monocristal d'aluminium initialement poli électrolytiquement, puis déformé de 5%. Connaissant l'orientation du cristal, le système de glissement peut être déterminé. Cependant, l'observation

micrographique normale est parfois trompeuse, et des "bandes" de glissement assez larges, étudiées au microscope électronique grâce à la technique des répliques, apparaissent formées de petits segments de lignes de glissement fines et droites (fig.31). La distance entre lignes de glissement est de l'ordre de 0.01 à 1 μm et la valeur du glissement (hauteur de la marche): 10 à 1000 Å. Dans les métaux CC, (le fer (X en particulier), les lignes de glissement ne sont généralement pas rectilignes, elles sont sinueuses (sauf à basse température). En effet, le fer n'a pas un système de glissement simple, et, pour une direction de glissement, plusieurs plans de glissement sont actifs qui appartiennent tous à une même zone $\langle 111 \rangle$. Ce phénomène peut s'interpréter en termes de glissement dévié fig.32.



Figures 31 et 32 Lignes et bandes de glissement

La composante vis de la dislocation pouvant changer de plan de glissement, quand il en existe plusieurs pour une même direction de glissement b' . Le glissement peut être observé également dans la masse du métal, en attaquant une section polie par un réactif mettant en évidence les points d'émergence des dislocations, les figures d'attaque sont alignés suivant l'intersection du plan de glissement avec la surface observée. La topographie des rayons X se prête bien à l'observation des débuts du glissement dans un cristal de haute perfection.

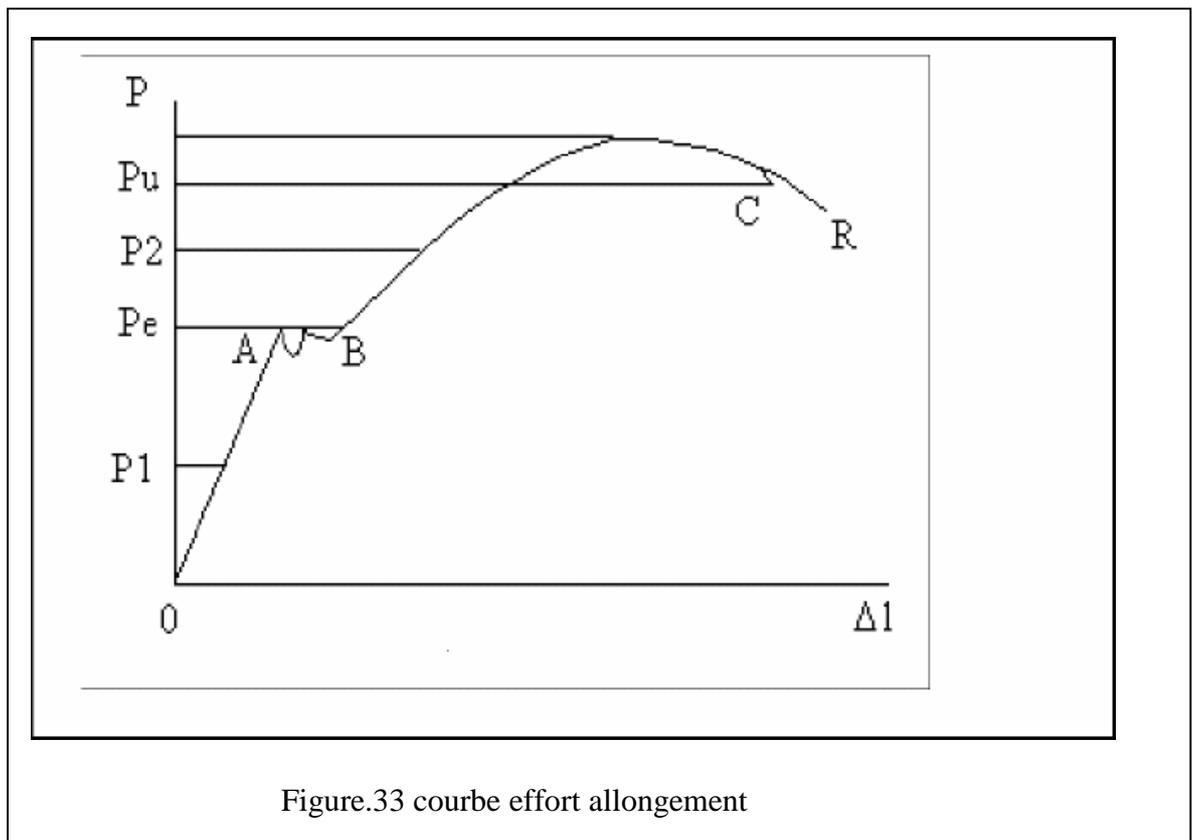
5.3. Polycristaux

Les courbes ont généralement un aspect simple et comprennent un domaine linéaire où la déformation est élastique, un domaine plastique d'allure parabolique, suivi éventuellement d'une décroissance de la charge (striction). Les courbes se terminent au point correspondant à la rupture de l'éprouvette.

Les diverses caractéristiques mécaniques à partir de la courbe de traction sont données ci dessous

5.3.1. Propriétés élastiques

Lorsqu'on exerce une contrainte (force) sur un cristal, celui-ci se déforme. Si le cristal reprend sa forme initiale lorsque la contrainte est relâchée, la déformation est dite élastique (absence de déformation permanente ou plastique). Dans le domaine élastique la déformation est proportionnelle à la contrainte, c'est la loi de Hooke (fig.33)



La courbe relevée au cours de l'essai de traction est connue sous le nom de diagramme d'essai de traction.

- la partie OB correspond à une déformation élastique, les allongements sont proportionnels aux charges.
- Le point B correspond à la fin de l'élasticité ou P_e est la charge de limite élastique.
- La partie BC correspond aux déformations permanentes (plastiques), les allongements croissent très vite avec la charge.

- Le point R correspond au moment de l'apparition de la rupture avec P_R charge de la rupture.

En général la contrainte normale est déterminée par: $\sigma = F / S_0$ (N / mm²)

F: la charge instantanée

S_0 : section initiale de l'éprouvette.

L'allongement s'écrit alors:

$$\varepsilon = \Delta l / l_0 = (l - l_0) / l_0$$

l_0 = longueur initiale

l = longueur après allongement.

Tang β = E.

$\delta = \varepsilon \times E$.

E : module d'élasticité.

ε : Allongement e x.100%

σ_e : contrainte limitée d'élasticité.

Les contraintes inférieures à σ_e produisent pratiquement que des déformations élastiques. La limite élastique $\sigma_{0.2}$ correspond à la contrainte provoquant une déformation élastique et durant la quelle on peut observer une chute de la charge lors de l'essai. Il existe la limite élastique supérieure et inférieure. Pour les matériaux sans variation de limite élastique, on détermine la limite élastique équivalente $\sigma_{0.2}$, il est fréquent que la limite élastique est choisie comme une caractéristique de la résistance. La contrainte à laquelle est effectuée la rupture s'appelle résistance à la rupture σ_r , donc: $\sigma_r = F_{max} / A_0$ (N/mm²)

Dans ce cas la rupture s'effectue dans la partie ascendante du diagramme, dans le cas où la rupture s'effectue dans la partie descendante du diagramme ou:

$$\sigma_r = F_r / A_0 \text{ (N/mm}^2\text{)}$$

Dans le cas des métaux plastiques, une fois les contraintes atteignent la valeur de rupture, la déformation se concentre en un secteur déterminé de l'éprouvette où apparaît un rétrécissement de la section appelée Striction (fig. 34).

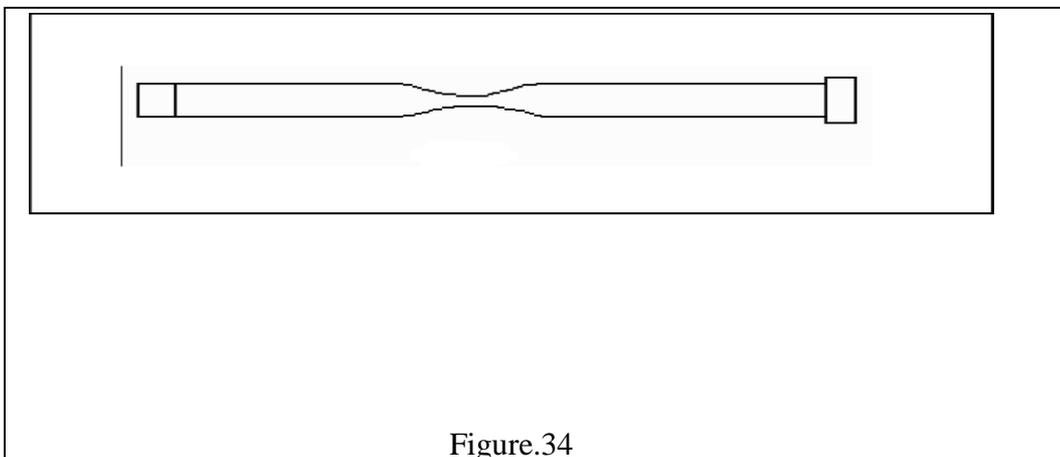


Figure.34

La charge diminue brusquement et en certain moment l'éprouvette se rompt à la valeur δr

La striction $\Psi = \frac{S_0 - S}{S_0} \times 100\%$

Les diagrammes contraintes- allongements diffèrent d'un métal à un autre (fig.35).

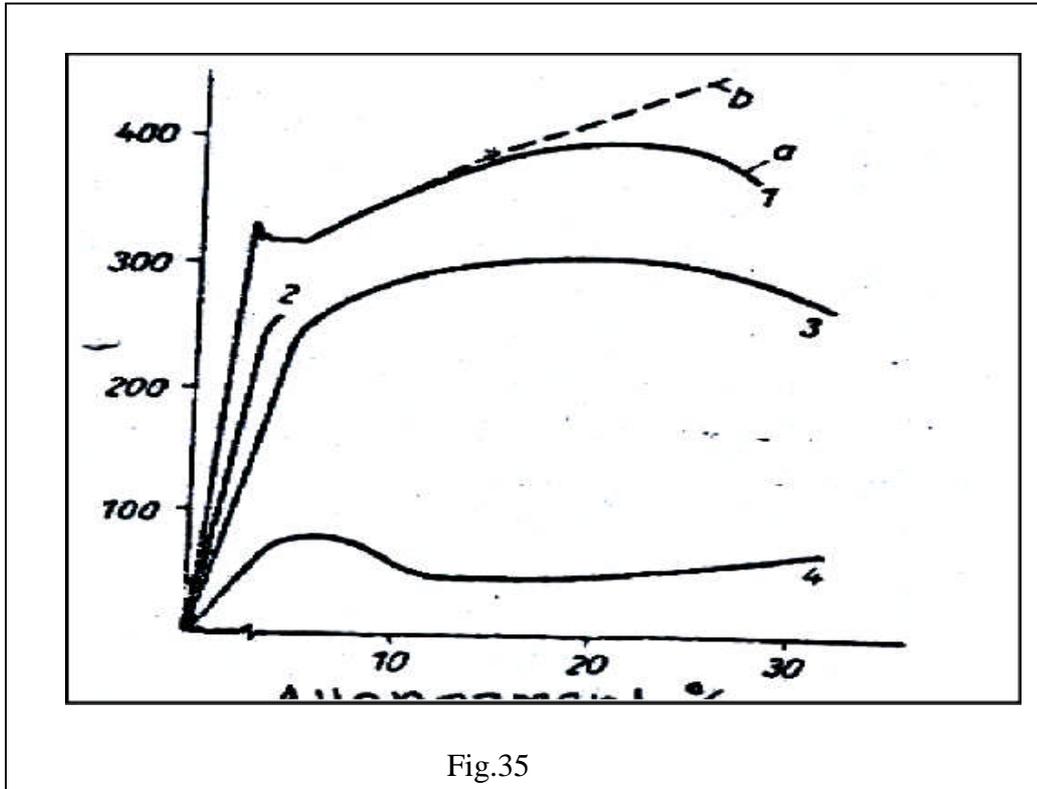


Fig.35

Modules d'élasticité E (n/mm²)

Diamant :	120.10 ⁴
Wolfram :	35.10 ⁴
Acier :	20.10 ⁴
FGL :	5.10 ⁴
Porcelaine :	55.10 ³
Alliage Al	:70.10 ³
Caoutchouc :	<10 ²
Résine :	120-140.10 ²

5.4 Structure de déformation en microscopie électronique

La microscopie électronique sur lames minces conduit à une connaissance plus profonde de la structure et des mécanismes de déformation plastique, puisqu'elle permet l'observation directe de certains défauts, les dislocations en particulier.

Dans un métal bien recuit on n'observe qu'un petit nombre de dislocations qui sont les traces du réseau du Frank. Dans un métal déformé la densité de dislocations croît avec la déformation, plus vite dans les monocristaux que dans les polycristaux. Dans le cuivre et l'argent polycristallins on trouve ainsi $\sigma / \varepsilon \sim 2.10^{11} \text{ cm}^{-2}$.

Une relation tout à fait générale (poly- et monocristaux) a été établie entre la contrainte d'écoulement et la densité de dislocations δ .

5.4.1 modules d'élasticité

Différents modules peuvent être définis pour un corps solide isotrope, c'est-à-dire un solide élastique idéal auquel s'applique par définition la loi de Hooke. Voyons brièvement les cas de quelques sollicitations simples.

Traction: la contrainte σ est la force appliquée par unité d'aire. La déformation ε est l'allongement relatif $(l - l_0) / l_0$. La loi de Hooke s'écrit:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

Où E est le module d'Young. Il vaut environ 200GPa pour l'acier, 100 pour le cuivre, 10 pour le plomb. La même définition s'applique au cas de la compression. L'allongement est accompagnée d'une contraction latérale égale à $\Delta r / r_0 = -\nu \varepsilon$ ou ν est le coefficient de poisson.

La variation relative de section est donc:

$$\Delta S / S_0 = 2 \Delta r / r_0 = -2 \nu \varepsilon$$

et la variation relative de volume: $\Delta V / V_0 = \Delta L / L_0 + \Delta S / S_0 = \varepsilon - 2 \nu \varepsilon$

L'expérience montre que ν n'est pas égal à 1 / 2, mais plutôt voisin de 1 / 3, il y a légère augmentation de volume au cours de la traction. Dans une éprouvette sollicitée en flexion plane, une face est en traction, l'autre en compression; il existe une région non déformée appelée fibre neutre.

Cisaillement : Dans la traction ou la compression, les contraintes sont normales aux faces sur lesquelles elles s'exercent; dans le cisaillement elles sont parallèles à ces faces, c'est-à-dire tangentielle.

La contrainte est toujours la force par unité d'aire (fig.36): on l'appelle dans ce cas scission τ ; la déformation γ s'exprime en valeur relative par le déplacement par unité d'épaisseur, c'est-à-dire par l'angle indiqué sur la figure. La loi de Hooke s'écrit $\tau = \gamma \mu$

Où μ est le module de coulomb.

On démontre très facilement que E et μ sont reliés par l'équation:

$$\mu = E / 2 (1+\nu)$$

Dans une éprouvette sollicitée en torsion, la déformation est un cisaillement pur.

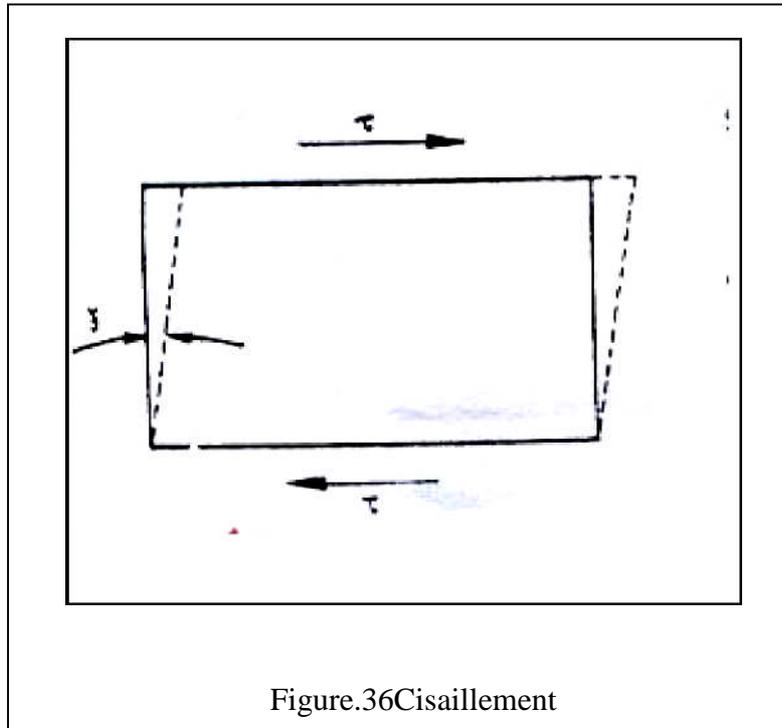


Figure.36 Cisaillement

Où ξ est un facteur de l'ordre de l'unité et τ une contrainte qui est sensiblement nulle pour les cristaux CFC.

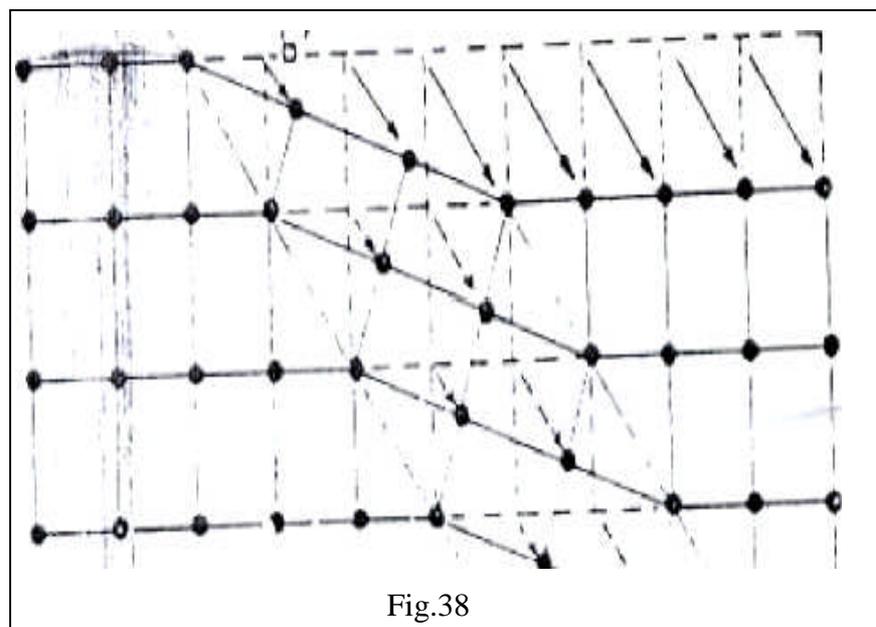
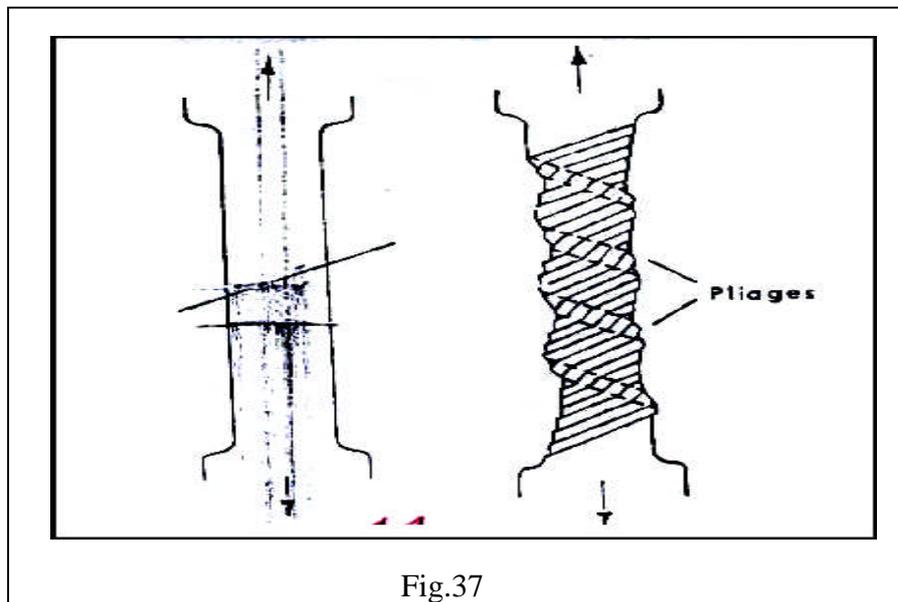
La distribution des dislocations n'est pas homogène. Pour de très faibles déformations, les configurations sont simples et correspondent à des schémas théoriques classiques: dipôles, multipôles, supercrans, intersections et jonctions, boucles...

Si l'énergie de défaut d'empilement est faible, les dislocations s'accumulent dans leur plan de glissement, et leur densité augmente continûment avec la déformation. Par contre, pour les métaux de forte énergie de défaut, le glissement dévié est possible: dès 1 ou 2% de déformation, les dislocations ont tendance à former des écheveaux. Les annihilations mutuelles, qui constituent un véritable processus de restauration dynamique, conduisent à un équilibre partiel entre dislocations créées, en nombre fonction de la vitesse de déformation, et dislocations annihilées, en nombre fonction de la température. Les écheveaux forment des parois qui délimitent des cellules plus ou moins parfaites (fig.37 et 38). Pour $E=10\%$, elles ont un diamètre d'environ $1\mu\text{m}$. Au fur et à mesure que la déformation progresse, les parois se densifient et la taille des cellules diminue légèrement. Pour l'aluminium et le cuivre, après écrouissage élevé, une structure cellulaire est observée, analogue à celle qui serait visible dans d'autres métaux écrouis après un

recuit de restauration. Dans les métaux à plus faible énergie de défaut d'empilement, les parois sont plus floues. Dans les alliages à très faible énergie de défaut ($\sim 20\text{mJ.m}^{-2}$) comme les aciers inoxydables austénitiques, on n'observe pratiquement jamais de cellules.

Pour observer le mouvement des dislocations et leurs configurations sous contrainte. On effectue des observations dynamiques, en tractionnant et en chauffant ou refroidissant l'échantillon dans le microscope électronique. La réalisation des appareils à très haute tension (1MeV ou plus) permet de telles observations in situ.

Sur des micro éprouvettes de quelques microns d'épaisseur: le glissement des dislocations, le glissement dévié, des sources actives, des réactions de jonction, etc... ont pu être observés et filmés, et de nombreux modèles théoriques examinés.



5.5. Caractéristiques mécaniques

La conduite du choix d'un matériau pour un composant devant assurer une fonction donnée relève donc de l'analyse des propriétés que doit présenter ce matériau pour satisfaire le besoin. L'ingénieur définit ainsi un profil matériau.

Parmi ces caractéristiques, la limite d'élasticité et la résistance à la traction sont sans nul doute celles auxquelles l'ingénieur pense en premier lorsqu'il conçoit. Rappelons que ces grandeurs sont des caractéristiques conventionnelles définies par la norme (norme A3-151 pour les aciers). Elles sont obtenues à partir de la courbe conventionnelle de traction. La dureté représente également une caractéristique très intéressante car très facile à mesurer. En outre, elle est étroitement liée à la limite d'élasticité du matériau et également à son comportement plastique (écrouissage). Toutes ces caractéristiques de résistance sont étroitement liées aux défauts de la structure cristalline sur lesquels on reviendra plus tard.

5.5.1. la limite d'élasticité en traction

Pour les métaux

A l'échelle microscopique, la limite d'élasticité correspond au niveau de contrainte qu'il faut appliquer pour activer les mouvements de dislocations, défauts de la structure cristalline, dans un nombre suffisamment important de grains. La limite d'élasticité d'un matériau polycristallin est en moyenne 1.5 fois supérieure à celle du matériau monocristallin. Ici apparaît l'intérêt des matériaux polycristallins vis à vis de cette caractéristique de résistance. Par définition, la limite d'élasticité (notée R_e) est la valeur de la contrainte conventionnelle F/S_0 correspondant à la transition élastique- plastique du comportement du matériau soumis

à la traction uniaxiale. Dans le cas des aciers doux (à faible teneur en carbone), la déformation plastique débute par une plastification hétérogène. La courbe de traction présente alors un palier en dent de scie, appelé palier de Piobers-Luders. Il faut alors définir une limite d'élasticité haute, notée R_{eh} , qui correspond au pic de traction précédant le palier.

Ce pic de contrainte traduit la contrainte nécessaire pour amorcer le premier glissement plastique. On définit également une limite d'élasticité basse, notée R_{el} , et qui correspond à la contrainte la plus faible observée sur ce palier. Pour sa part, la longueur du palier de déformation plastique hétérogène est notée $A_p\%$. Pour beaucoup d'autres alliages, la transition élastique- plastique est progressive: c'est le cas en outre pour les aciers de traitements thermiques, les alliages d'aluminium. La norme définit alors pour ces matériaux une limite d'élasticité conventionnelle correspondant à un certain taux de déformation plastique (déformation permanente), le plus souvent fixé à 0.2%. Cette valeur est notée $R_{p0.2}$ (exprimée en MPa). Dans certains domaines de la conception (construction aéronautique en autres), les ingénieurs

retiennent la limite d'élasticité conventionnelle à 0.02% ($R_{p0.02}$). La figure 39 ci-dessous illustre ces conventions.

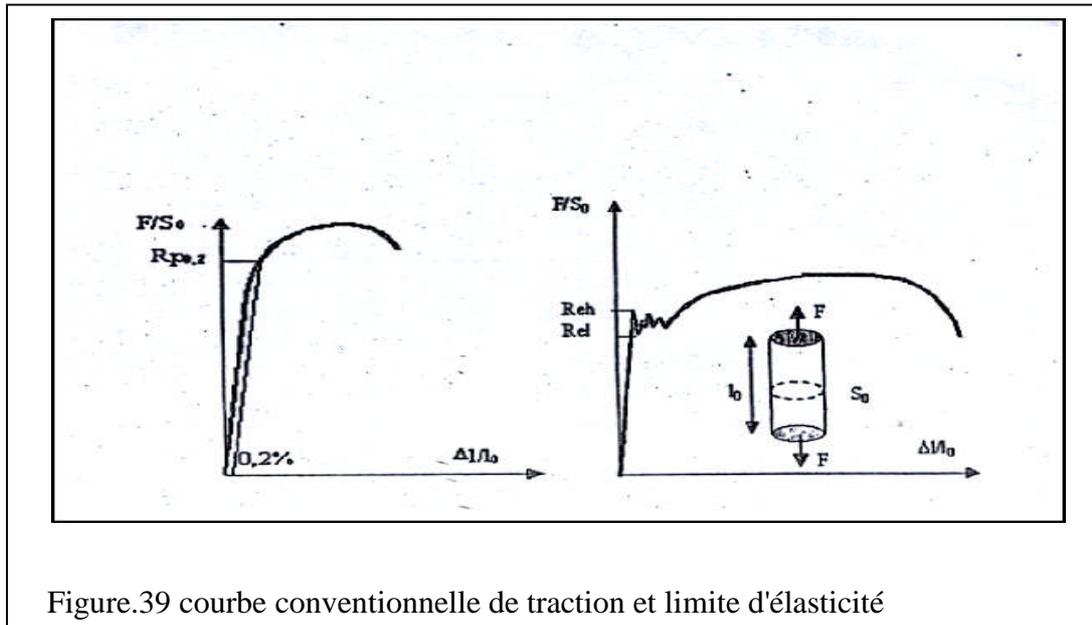


Figure.39 courbe conventionnelle de traction et limite d'élasticité

Pour les céramiques

Les céramiques et les verres sont peu résistants en traction et ils sont fragiles: aucune plasticité n'apparaît avant la rupture; la limite d'élasticité et la résistance à la traction sont confondues. Ils se comportent beaucoup mieux en compression. C'est donc cette caractéristique qui sera retenue pour caractériser le comportement de ces matériaux.

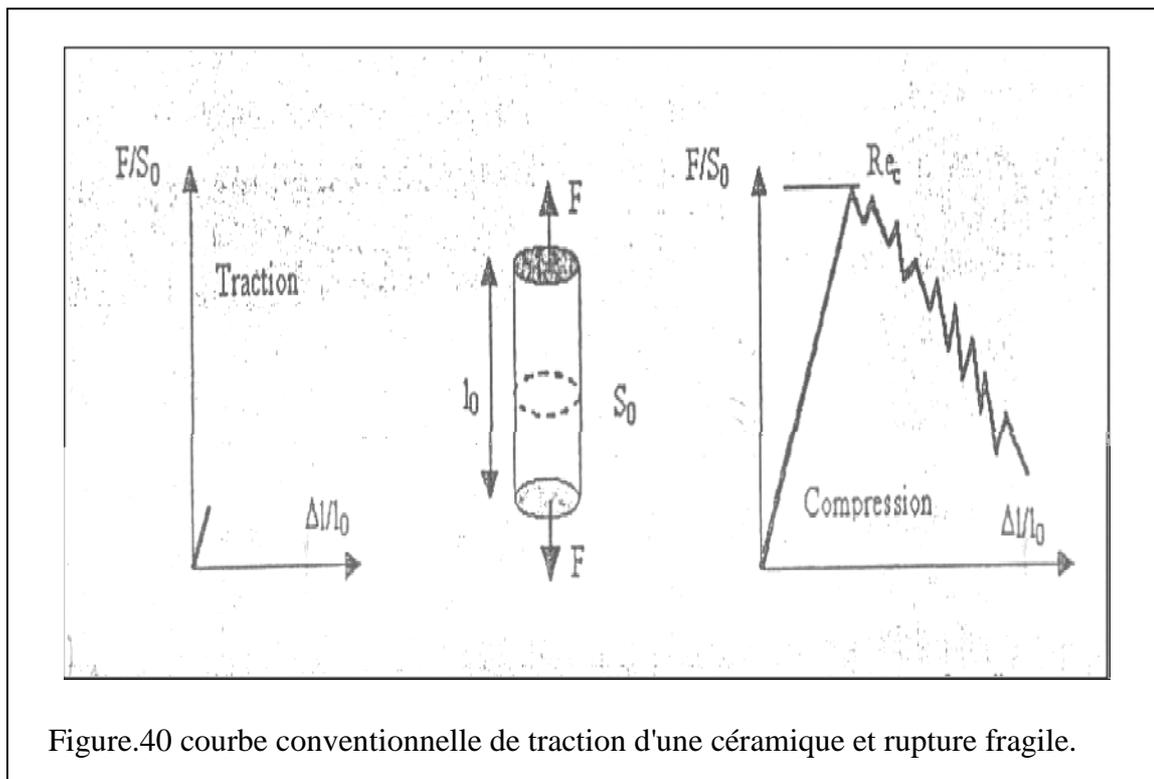
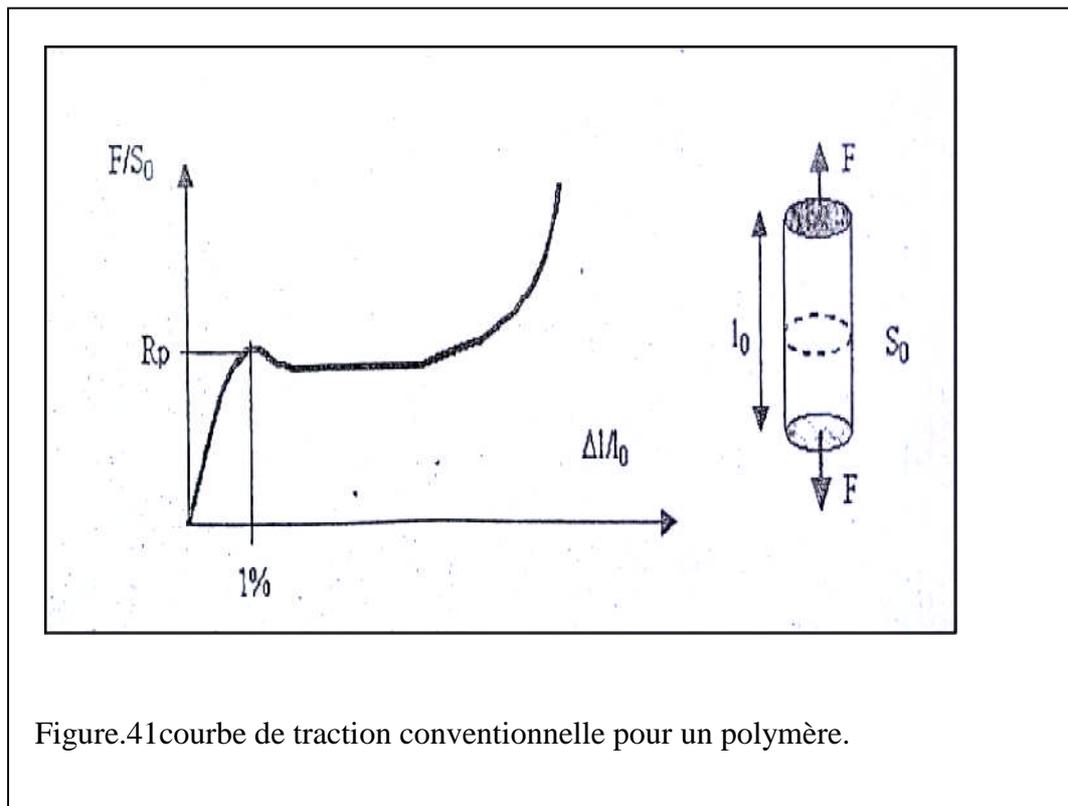


Figure.40 courbe conventionnelle de traction d'une céramique et rupture fragile.

Pour les polymères

La limite d'élasticité correspond à la limite d'élasticité apparente, c'est-à-dire la contrainte à laquelle la courbe contrainte-déformation devient clairement non linéaire. Cela correspond typiquement à une déformation de l'ordre de 1%. A l'échelle microscopique, cette limite correspond au glissement irréversible des chaînes moléculaires (microfissuration) et à l'apparition de zones de faible densité qui diffusent la lumière, faisant apparaître le polymère blanc.



Pour les composites

Tout comme les céramiques, ces matériaux présentent un comportement purement élastique. Pour ces matériaux, la limite d'élasticité conventionnelle peut être définie comme étant la contrainte correspondant à un certain taux de déformation, fixé en général à 0.5%.

5.5.2. Modules d'élasticité

Les modules d'élasticité longitudinal E (ou module de Young) et transversal (G) (module de Coulomb) et de compressibilité (K) traduisent la raideur d'un matériau. Cette raideur est principalement liée à la nature des liaisons interatomiques assurant la cohésion du réseau cristallin ainsi qu'à la densité de ces liaisons en rapport avec la nature des liaisons. Ces liaisons ont un comportement élastique. La raideur du matériau est liée à son comportement élastique. Ainsi, les modules les plus élevés sont observés pour les matériaux métalliques caractérisés par des empilements atomiques (à la base de la structure cristalline) extrêmement denses (structure cubique faces centrées CFC ou hexagonale

compacte HC) et des liaisons interatomiques covalentes de grande raideur. A l'opposé, les polymères présentent des modules faibles, en rapport avec la raideur des liaisons secondaires liant entre elles les chaînes carbonées. Pour un matériau isotrope, hypothèse retenue pour les alliages métalliques observés à l'échelle macroscopique (échelle de l'ingénieur), module longitudinal, transversal et de compressibilité sont liés entre deux par certaines relations. En ce qui concerne les matériaux métalliques, on a en général

$$G \sim E/8 \text{ et } K \gg E$$

Le module d'élasticité longitudinal correspond en pratique à la pente de la partie linéaire de la courbe conventionnelle de traction (contrainte F/S_0 - allongement relatif $\Delta L/L_0$ obtenue à partir d'un essai de traction uniaxial au cours duquel est enregistré le diagramme de traction classique (force F - allongement $\sim \Delta l$). Cependant, il est nécessaire d'instrumenter l'essai soit avec des jauges de déformations directement collées sur la partie calibrée de l'éprouvette (opération délicate sur éprouvette cylindrique) soit en utilisant un extensomètre, appareil annexe de très grande précision (extensomètre à jauges, extensomètre à visée LASER). L'analyse vibratoire ou l'analyse par ondes ultrasonores constituent d'autres moyens très précis de mesurer ce module.

5.5.3. La résistance à la traction

Même si cette caractéristique est beaucoup moins utile pour l'ingénieur (il est rare de dimensionner à la rupture statique) il n'est pas inutile de la rappeler ici.

Pour les métaux

Elle ne correspond pas à la contrainte appliquée au moment de la rupture, à partir de laquelle on voit apparaître localement un étranglement de la section. Au niveau de contrainte, la déformation plastique, qui jusque là était répartie uniformément, se concentre dans cette zone d'étranglement appelé zone de striction. Sur la courbe conventionnelle de traction, elle correspond à la valeur maximale de la contrainte conventionnelle F/S_0 .

A l'échelle microscopique, cela correspond à une stabilité plastique liée à un taux d'endommagement très important (densité de dislocation très importantes avec informations d'amas de dislocations pouvant constituer des microcavités). A partir de ce niveau de contrainte, un col de striction apparaît à la vitesse de déformation augmente. La contrainte réelle (effort ramené à la section réellement résistante) augmente considérablement jusqu'à ce que la section résistante soit insuffisante. Il y'a alors rupture fragile.

Pour les céramiques

Le comportement fragile des ces matériaux se traduit par le fait que limite d'élasticité et résistance à la traction sont identiques.

Pour les polymères

Il est rare de parler de cette caractéristique par les polymères. Elle correspondrait alors à la contrainte à rupture.

5.5.4. La dureté

Pour les métaux

La dureté caractérise la résistance que présente le matériau à la pénétration d'un indenteur sur lequel on exerce un effort. Au cours de l'essai de dureté, l'effort appliqué sur l'indenteur est suffisamment important pour laisser une trace à la surface de l'échantillon de matériau testé. Le rapport de l'effort à la surface de l'empreinte laissée par l'indenteur définit cette dureté. Bien qu'à priori, la dureté ait la dimension d'une contrainte, la norme spécifie des échelles de dureté correspondant aux différentes méthodes employées. Citons pour les principales, l'essai Brinell, l'essai Vickers ou l'essai Rockwell. Chaque technique présente un domaine d'utilisation et sur le domaine commun, il y a naturellement une certaine corrélation entre les valeurs fournies par chacune des méthodes. Il est donc important de bien spécifier l'échelle de dureté utilisée lorsque l'on veut comparer différents matériaux de ce point de vue.

La trace laissée par l'indenteur après décharge provient de la déformation plastique occasionnée par l'état de contrainte local créé par la charge appliquée sur l'indenteur. On comprend donc que la dureté soit extrêmement liée:

- d'une part, à la limite d'élasticité du matériau: la contrainte locale doit conduire à la plastification du matériau;
- d'autre part, à la capacité d'érouissage du matériau: plus on déforme plastiquement, plus il faut augmenter la contrainte pour pouvoir poursuivre la déformation.

Il n'y a pas de règles simples reliant la dureté et les autres caractéristiques de résistance mécanique. Cependant certaines lois empiriques ont été proposées. On peut citer celle de Tabor que relie la dureté de Vickers à la contrainte de traction provoquant une déformation totale de 8%; $H_v = 3 \sigma_{0,08}$ ou celle de proposée par l'IRSID pour les matériaux à faible coefficient d'érouissage reliant la dureté de Brinell et la résistance à la traction: $HB = 3 R_m$.

5.5.5. La ténacité (résistance en rupture)

La ténacité est une caractéristique mécanique de résistance qui relève de la mécanique de la rupture, c'est-à-dire de la mécanique des pièces initialement fissurées. Elle exprime la résistance du matériau à la propagation d'une fissure. Elle est définie soit par le facteur d'intensité de contrainte critique K_c soit par l'énergie de rupture G_c .

Le chargement d'une pièce fissurée induit une modification du champ de contrainte à fond d'entaille (cela rappelle la notion de concentration de contrainte pour les formes discontinues des pièces mécaniques). On définit alors le facteur d'intensité de contrainte K . Il caractérise l'intensité de la singularité du champ de contrainte à la pointe de la fissure. Ce facteur d'intensité de contrainte dépend:

du mode de sollicitation de la fissure.

mode 1: en traction-sollicitation normale au plan de la fissure (direction y).

mode 2: en cisaillement plan-cisaillement suivant x.

mode 2: en cisaillement antiplan-cisaillement suivant z. de la géométrie de la fissure et de la pièce.

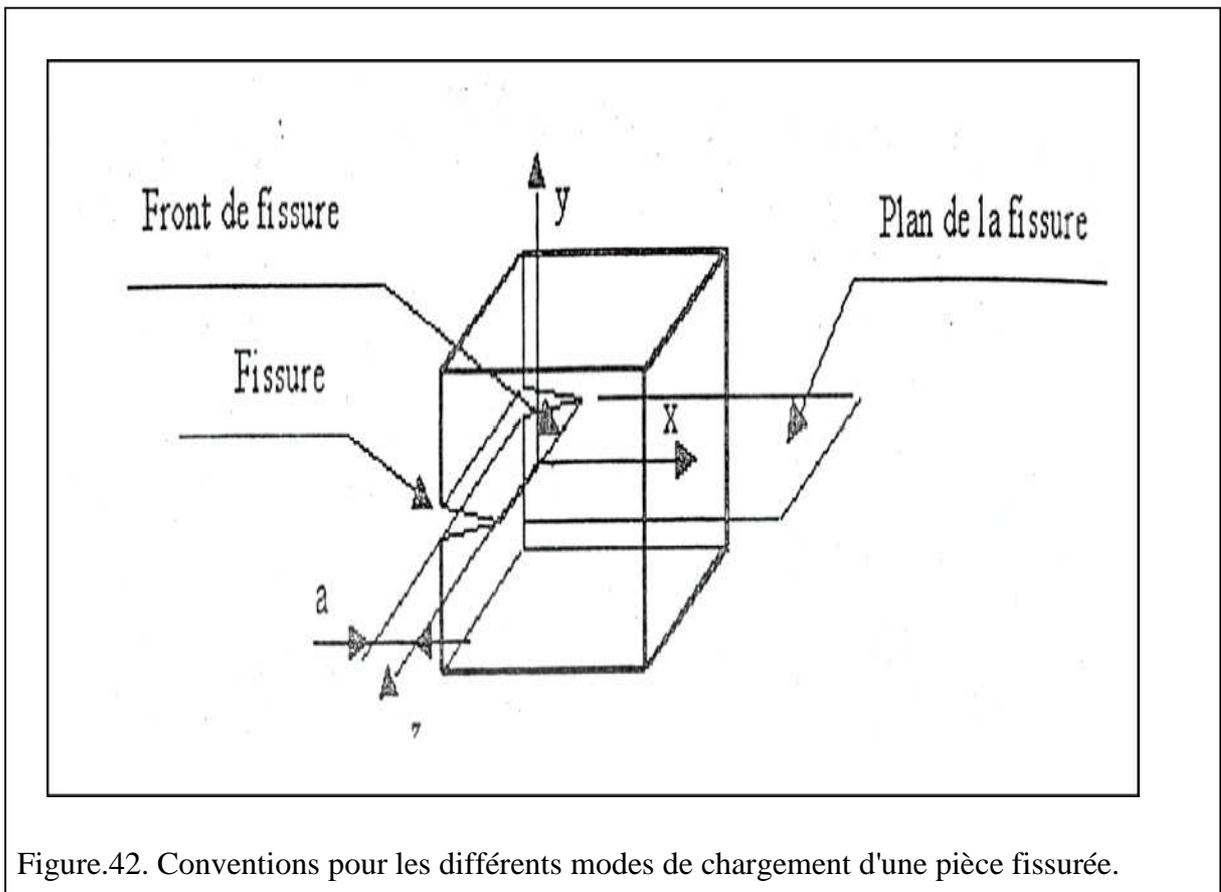


Figure.42. Conventions pour les différents modes de chargement d'une pièce fissurée.

Si l'on augmente le niveau de chargement, la fissure s'agrandit jusqu'à une taille critique à partir de laquelle elle se propage brutalement entraînant la rupture de la pièce. A cette taille critique correspond une valeur du facteur d'intensité de contrainte notée K_c appelée de ce fait facteur d'intensité de contrainte critique. Ce facteur dépend bien sûr du mode de chargement mais également du matériau. L'unité de cette caractéristique est le $\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2}$. la rupture d'une pièce fissurée peut être occasionnée par une augmentation statique du chargement. Elle peut également provenir du fait d'un chargement cyclique dont le niveau maximal n'aurait pas entraîné la rupture si le chargement avait été statique. Il s'agit là d'un phénomène de plastification locaux.

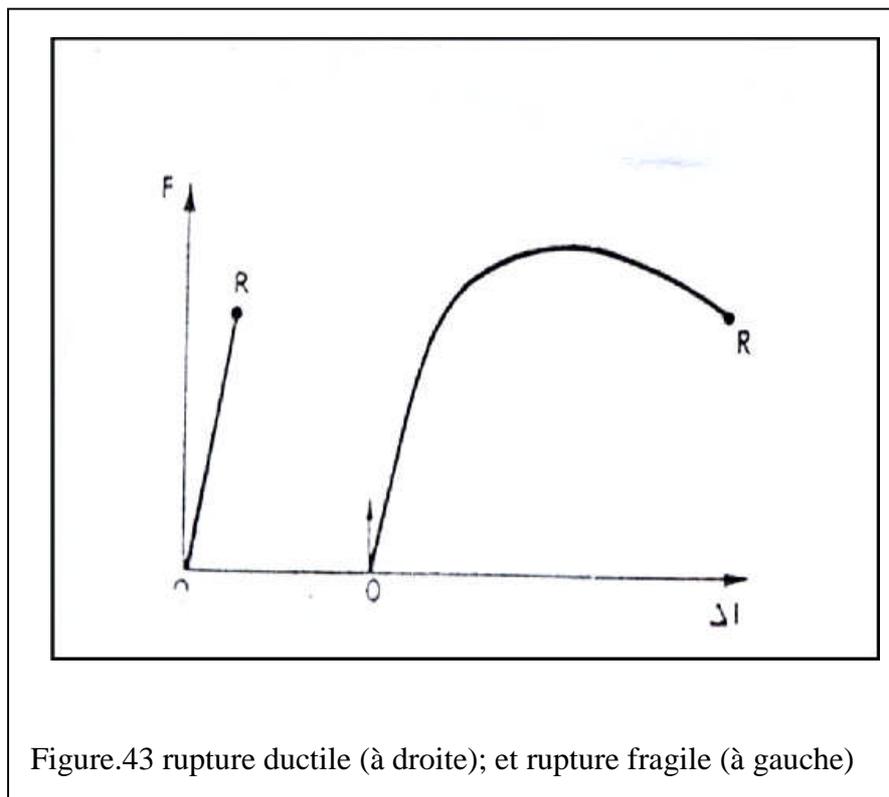
La rupture des métaux n'est pas un phénomène simple. Elle dépend du matériau, de la température, du mode de sollicitation (traction, flexion, fatigue,...) et de la vitesse d'application des contraintes.

5.5.6. Types de ruptures

Différents critères sont utilisés pour différencier les types de rupture, ductile et fragile:

Un critère macroscopique ou mécanique: présence ou absence de déformation plastique avant la rupture; voir par exemple la figure 43 pour le cas de l'essai de traction.

Un critère microscopique, fondé sur l'observation du faciès de rupture, et qui peut dépendre de l'échelle à laquelle est observé la cassure.



Aussi un faciès microfractographique ductile peut-il se rencontrer en général après une rupture ductile, mais aussi après des ruptures fragiles au sens de la mécanique de la rupture (par exemple alliages CFC à haute résistance). Inversement, il est possible d'observer des clivages sur des ruptures ductiles, c'est-à-dire précédées d'un allongement macroscopique appréciable.

Faciès fractographique

La rupture fragile peut correspondre soit à une décohésion intergranulaire (fragilité intergranulaire à froid de certains alliages), soit à une rupture des grains suivant des plans cristallographiques simples: c'est le clivage, la surface de rupture présente un aspect caractéristique de petites facettes (une par grain) qui réfléchissent la lumière, d'où le nom faciès à "grains" ou "cristallin".

Au contraire, une surface de rupture ductile présente généralement un aspect grisâtre et granuleux, dit "à nerf", dû à la forte irrégularité du profil à l'échelle microscopique. Sur des éprouvettes de traction, on observe la rupture en coupelle, qui se forme dans la zone de striction par déchirure interne perpendiculairement à l'axe de traction et s'achève par cisaillement oblique dans les parties marginales. A température élevée, on peut aussi observer une rupture en pointe, sans surface de rupture proprement dite, par suite de striction complète. L'examen oculaire des surfaces de rupture peut être assez trompeur. Souvent il y a mélange de faciès de rupture ductile et fragile et le microscope électronique à transmission, par la technique des répliques, et le microscope électronique à balayage permettent un examen sérieux des cassures (microfractographie électronique (fig.44a). c'est cet examen qui permet de décider du caractère réellement fragile (fig.44.b) ou (fig.44.c) de la rupture, plutôt que le critère de la déformation plastique préalable. La rupture fragile en ce sens peut donc se produire après une certaine déformation plastique. Elle peut coexister dans un même échantillon avec des zones de rupture ductile.

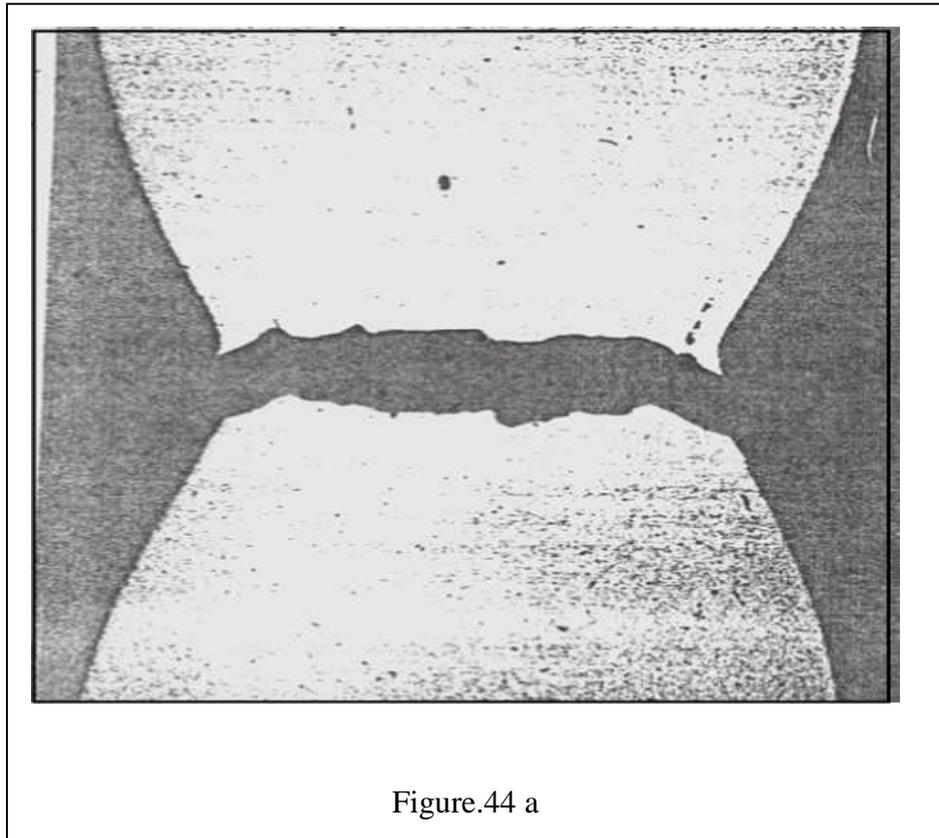




Figure.44 b



Figure.44 c

5.5.7. Rupture ductile.

a) Métaux industriels.

- Dans les métaux industriels la surface d'une rupture se présente, quel que soit le côté de la cassure examiné, comme une juxtaposition de "cupules" au fond desquelles on observe souvent un précipité ou une inclusion. La rupture peut alors s'expliquer par la succession de trois stades (fig.45).

- formation de fissures à l'interface des particules présentes dans le métal, car si celles-ci sont plus dures que la matrice, elles ne se déforment pas;
 - croissance à partir de ces fissures de trous qui s'allongent dans le sens de la déformation;
 - rupture des pédoncules de métal séparant les trous par striction complète ou par cisaillement. C'est ce mécanisme qui joue dans la rupture en coupelle dont nous avons parlé plus haut. En fait le faciès en coupules, observé par micrographie électronique, est le faciès typique de la rupture ductile.
- La ductilité du métal, mesurée par exemple par la striction, dépend donc de la fraction en volume des particules. On a montré au moyen d'alliages synthétiques contenant de fines dispersions d'inclusion, que la ductilité varie à peu comme l'inverse de cette fraction.

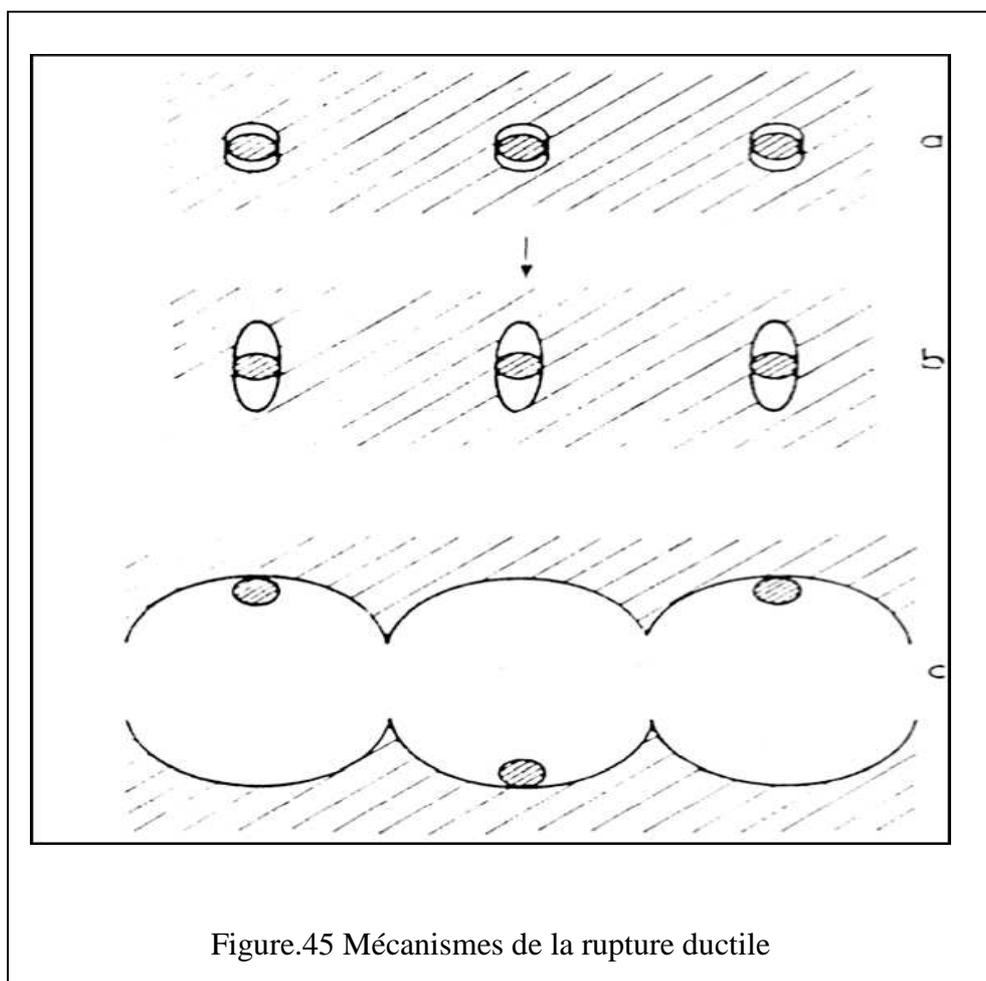


Figure.45 Mécanismes de la rupture ductile

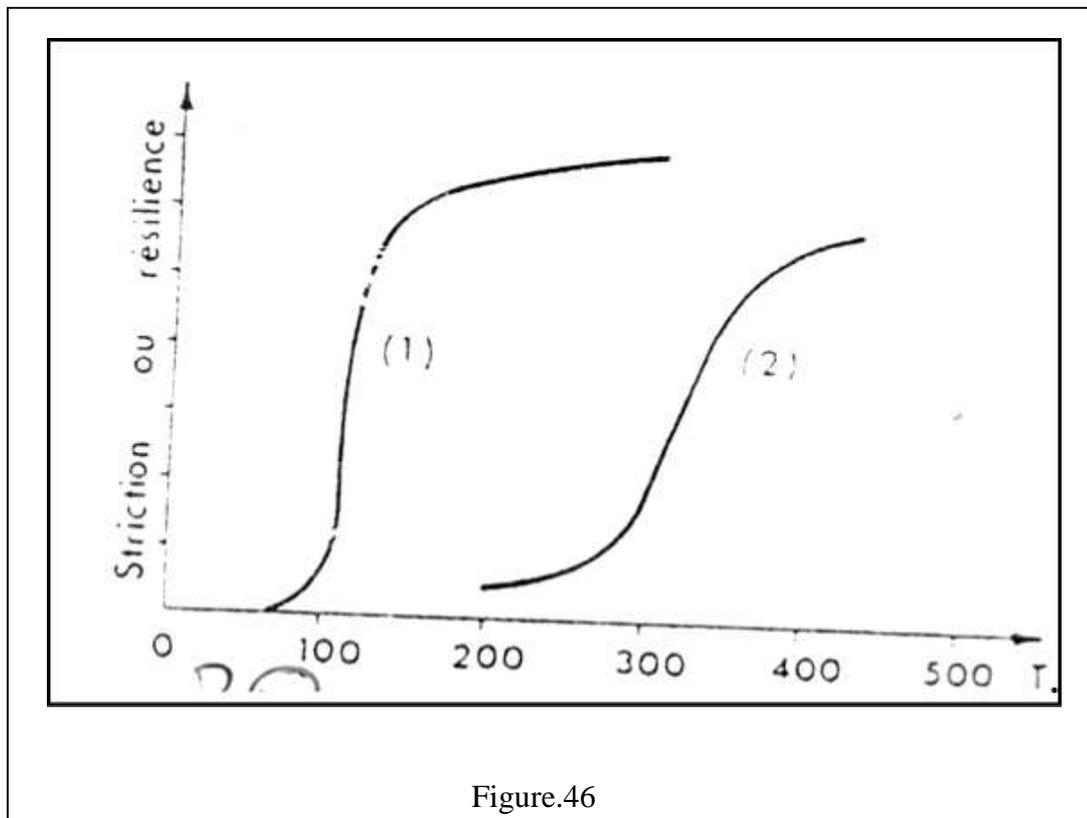
b) Monocristaux.

Le mécanisme précédent n'agit généralement pas dans les monocristaux du fait de leur pureté. Dans les cristaux CC ou CFC, l'existence de plusieurs systèmes de glissement rend possible la striction, et l'éprouvette se rompt par striction complète (rupture en pointe ou en ciseau).

Dans les monocristaux HC ceci n'est pas possible si le glissement basal est seul actif. La rupture peut se produire alors par cisaillement complet de l'échantillon suivant un plan de glissement.

5.5.8. Rupture fragile par clivage.

Les métaux CC, contrairement aux CFC, sont sensibles à la rupture fragile. Il doit donc s'agir d'une propriété intrinsèque de cette structure. En fait, d'une manière générale, les métaux CC sont fragiles à basse température, et il existe une zone de température vers $0.27T_F$ où se fait la transition d'un mode de rupture à l'autre. On la caractérise par une "température de transition" fondée plus ou moins arbitrairement sur la mesure d'une propriété mécanique (allongement de rupture, striction, résilience, etc.) ou sur le faciès de la cassure. Cette propriété des métaux CC a une importance technologique considérable, tout spécialement dans le cas des aciers où la température de transition peut se situer en voisinage de l'ambiante. Elle se trouve très sensible à la composition, aux traitements thermiques et à la vitesse de sollicitation (fig.46). Le risque de rupture fragile est particulièrement lié à la température. Aux défauts et aux concentrations locales de contrainte. Les essais classiques de rupture fragile sont effectués à vitesse de sollicitation élevée et sur des éprouvettes entaillées de manière à relever la température de transition



Dans les cristaux HC à basse température, la rupture se produit également par clivage. Le zinc peut être clivé dès la température ambiante, plus ou moins facilement suivant son orientation, mais à -195°C sa rupture procède toujours par clivage. Le clivage se produit suivant des plans cristallographiques simples: (001) dans les métaux CC, (0001) dans le zinc.

Il est facile de calculer théoriquement la contrainte de traction critique σ_R pour produire la décohésion suivant le plan de clivage. En effet, la rupture fait apparaître deux surfaces libres et:

$$\sigma_R = (2\gamma E/a)^{1/2}$$

Où γ est énergie superficielle, E le module d'Young, a le paramètre. Avec $E=100$ GPa

$\gamma=1\text{J/m}^2$, $a=3\text{\AA}$, on trouve $\sigma_R \sim 10\text{GPa}$. Or, la contrainte normale de décohésion par clivage

dans les monocristaux est de quelques dizaines ou centaines de MPa (Fe(x) à -185°C , $\sigma_R=280\text{MPa}$). On se retrouve devant une difficulté qui rappelle le problème de la limite d'élasticité théorique: un processus de propagation des fissures à partir de certains défauts, les microfissures présentes initialement ou formées au cours de la déformation. C'est le problème de la rupture fragile. Au sens microscopique du terme.

5.5.9. La résistance en fatigue

La résistance en fatigue d'un matériau traduit sa capacité à subir un cycle de chargement régulier ou aléatoire. Si l'on fait subir à une pièce mécanique un chargement non constant dans le temps dont le niveau maximal ne dépasse pas la résistance à la traction du matériau, on peut observer la rupture de la pièce au d'un nombre plus ou moins grand de cycles.

Pour les métaux

Ce comportement est lié aux déplacements des dislocations dans quelques grains, surtout, situés en surface de la pièce car c'est en surface que l'on observe les niveaux maxima des contraintes (chargement à gradient de contrainte, type flexion, et/ou zone de concentration de contrainte). Ces grains sont en fait favorablement orientés par rapport au chargement pour que l'état de contrainte qui y règne entraîne la plastification du grain. Le chargement changeant sans cesse de direction, ces mouvements de dislocations finissent par déboucher en surface et créent des microfissurations qui finiront par coalescer pour donner naissance à une macrofissure (sur plusieurs grains) qui se propagera jusqu'à atteindre une taille critique entraînant la rupture brutale de la pièce. Les principaux paramètres influant sur ce comportement sont la contrainte moyenne (moyenne des contraintes appliquées au cours du cycle) et la contrainte alternée (demi-amplitude du cycle de contrainte). Lorsqu'un métal est soumis à des sollicitations mécaniques qui varient avec le temps, la rupture peut se produire pour des valeurs de la contrainte maximale bien inférieures à la résistance à la rupture ou même à la limite d'élasticité du matériau: c'est la rupture en fatigue.

En pratique il s'agit de sollicitations périodiques à fréquence élevée (moteurs, véhicules) ou faibles (cellules d'avion, constructions métalliques soumises au vent...). On appelle fatigue ou endommagement par fatigue la modification des propriétés des matériaux constrictive à l'application de cycles de contrainte répétés et endurance la capacité de résistance à la fatigue.

5.5.10. Aspects macroscopiques

Les essais de fatigue se traduisent par la courbe de Wöhler qui représente pour chaque valeur de la contrainte maximale appliquée le nombre de cycles à rupture. La courbe de Wöhler permet de distinguer trois domaines:

1.- fatigue plastique oligocyclique

Sous fortes contraintes supérieures à la limite d'élasticité macroscopique. Le nombre de cycles à rupture N_R (entre 1 et 10^5) est relié à la déformation plastique élémentaire $\Delta \epsilon_P$ accompagnant chaque cycle par la loi de Coffin:

$$N_R^{1/2} \cdot \Delta \epsilon_P = cte.$$

2.- fatigue ou endurance limitée

la rupture apparaît après un nombre limité de cycles, $\sim 10^5$ à 10^7 . Le nombre de cycles à rupture N_R croît lorsque l'amplitude de la contrainte périodique décroît:

$$N_R (\sigma - \sigma_D)^n \sim cte,$$

σ_D est la limite d'endurance.

3.- endurance limitée ou zone de sécurité, sous faible contrainte

La rupture ne se produit pas avant un nombre donné de cycles, 10^7 ou plus; les microfissures ne peuvent pas se former, ou encore ne peuvent pas atteindre un stade de développement critique. Pour certains métaux comme l'aluminium le passage entre les domaines de fatigue et de sécurité est très progressif, parfois il n'apparaît pas de limite d'endurance asymptotique. Pour les aciers ferritiques, la courbe présente un coude accentué qui permet la détermination d'une limite d'endurance.

Les courbes de Wohler sont en outre sensibles à la valeur de la contrainte moyenne appliquée, à la fréquence et à la nature de la sollicitation, à l'état de surface, au milieu ambiant (durée de vie beaucoup plus élevée sous vide qu'à l'air) et à la température.

5.5.11. Durée de vie et évolution structurale Au cours de la durée de vie d'une éprouvette on peut distinguer plusieurs stades:

1/ l'accommodation au cours duquel la microstructure évolue; 2/ l'endommagement qui recouvre des stades d'amorçage, puis de propagation de fissures; 3/ la rupture finale. L'importance de ces divers processus dépend évidemment du niveau de contrainte ou de déformation imposée. C'est ainsi que le nombre de cycles passés au stade d'amorçage est d'autant plus grand, que le nombre de cycles à rupture est lui-même plus grand

.a) accommodation.

Ce stade correspond au petit nombre de cycles. Il revêt une importance particulière, et se prête bien à l'étude, dans les cas de la fatigue plastique ou oligocyclique: il correspond à la partie la plus à gauche de la courbe de Wohler. En fatigue plastique, le matériau est soumis à une déformation plastique alternée \pm répétée; on observe des cycles d'hystérésis successifs c_r, c , au cours desquels la contrainte évolue (accommodation) avant de stabiliser au bout de quelques milliers de cycles: on atteint un état de régime où les cycles se superposent. Pour chaque valeur de la déformation c , ou mieux de la déformation plastique s_P , on obtient une contrainte de régime ou de saturation a_S . Le lien des points a_S, s_P définit une courbe de durcissement par écrouissage cyclique. Dans les polycristaux elle peut être représentée par une loi parabolique, comme la courbe de "durcissement monotone" (obtenue en traction simple). Par rapport à cette dernière, on observe suivant les matériaux, un durcissement ou un adoucissement. Dans les monocristaux, la courbe d'écrouissage cyclique présente un palier à partir d'une certaine déformation seuil: au dessous de celle-ci les dislocations réarrangent en écheveaux ou veines. Au début du palier apparaissent des bandes de déformation localisées, parallèles au plan de glissement, appelées "bandes persistantes" où la déformation est très élevée (10^{-5} à 10), alors qu'elle est cent fois plus faible dans le reste du métal (fig.47). Si l'on accroît la déformation imposée, les bandes persistantes occupent progressivement toute l'éprouvette.

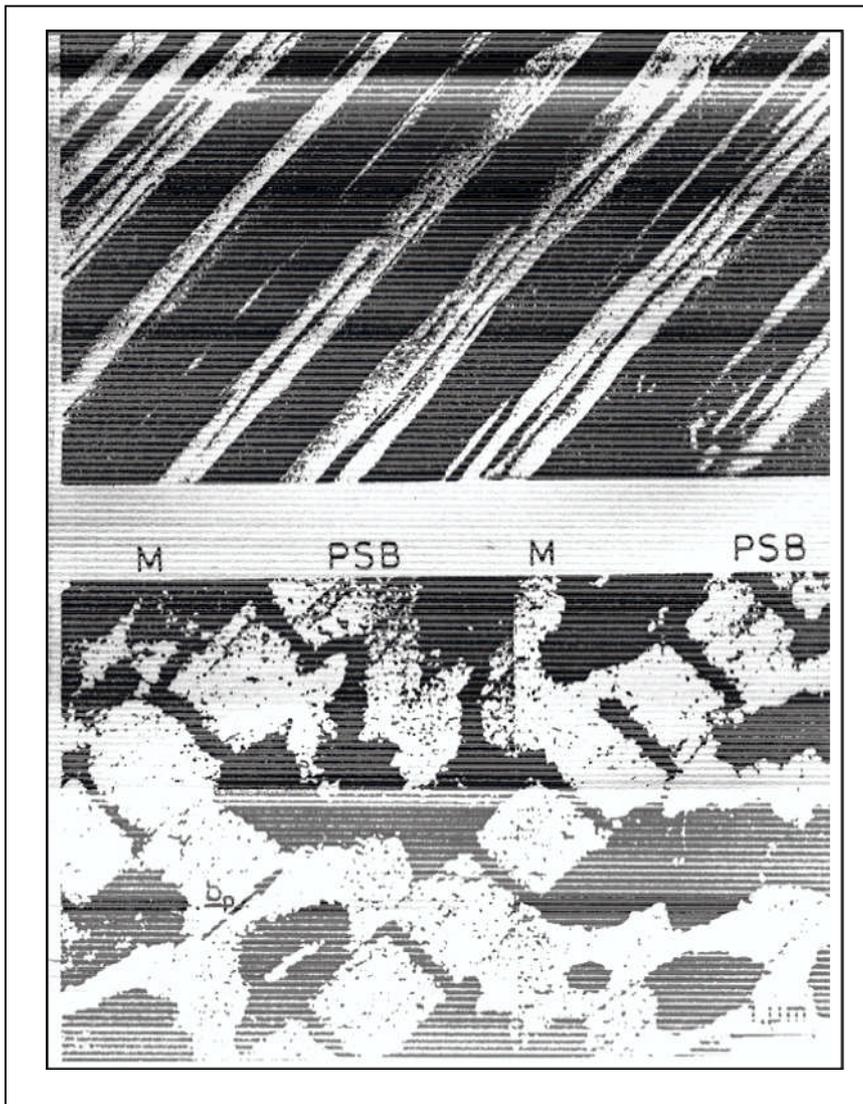
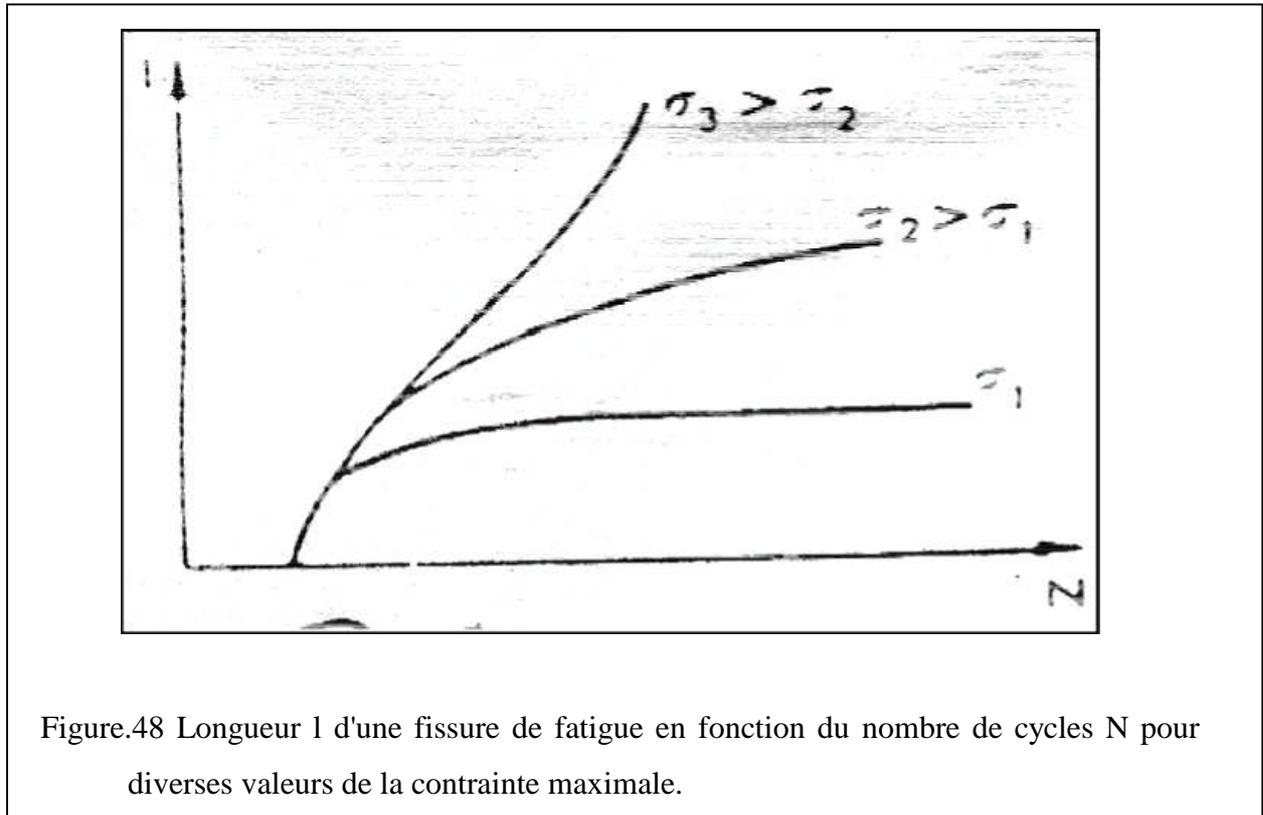


Figure.47. Bandes de glissement persistantes dans un monocristal de cuivre soumis à une déformation plastique oligocyclique égale à $\pm 1.5.10^{-3}$. En haut, relief superficiel observé par microscopie électronique à balayage. En bas, micrographie électronique en transmission : M matrice écrouie, P.S.B bande de glissement persistante (le plan de glissement est perpendiculaire au plan de la micrographie). D'après H.Mughrabi (Max Planck Institut).

Ces bandes présentent une microstructure en canaux allongés dans le plan de glissement, séparés par des murs de dislocations, visibles par la tranche sur la micrographie de la figure 34. Les bandes persistantes sont très visibles dans les métaux CFC, où elles sont favorisées par une forte valeur de l'énergie de défaut d'empilement (facilité du glissement dévié). Elles sont plus diffuses dans les alliages CC. Dans les alliages, le cisaillement des précipités par les dislocations favorise la formation des bandes persistantes. Dans les polycristaux, la fatigue oligocyclique produit une microstructure en cellules (diamètre $\sim 2e \mu\text{m}$), aux parois d'autant plus fines que la déformation est plus élevée, et d'autant mieux définies que l'énergie de défaut d'empilement est plus forte.

b) Amorçage et propagation des fissures

La figure 48 montre des courbes de propagation d'une fissure pour diverses valeurs de la contrainte et fait apparaître la limite d'endurance a_1 telle que la fissure ne se propage pas. Les observations macroscopiques et microscopiques permettent de distinguer 3 stades (diagramme de Forsyth, fig.48).



Amorçage:

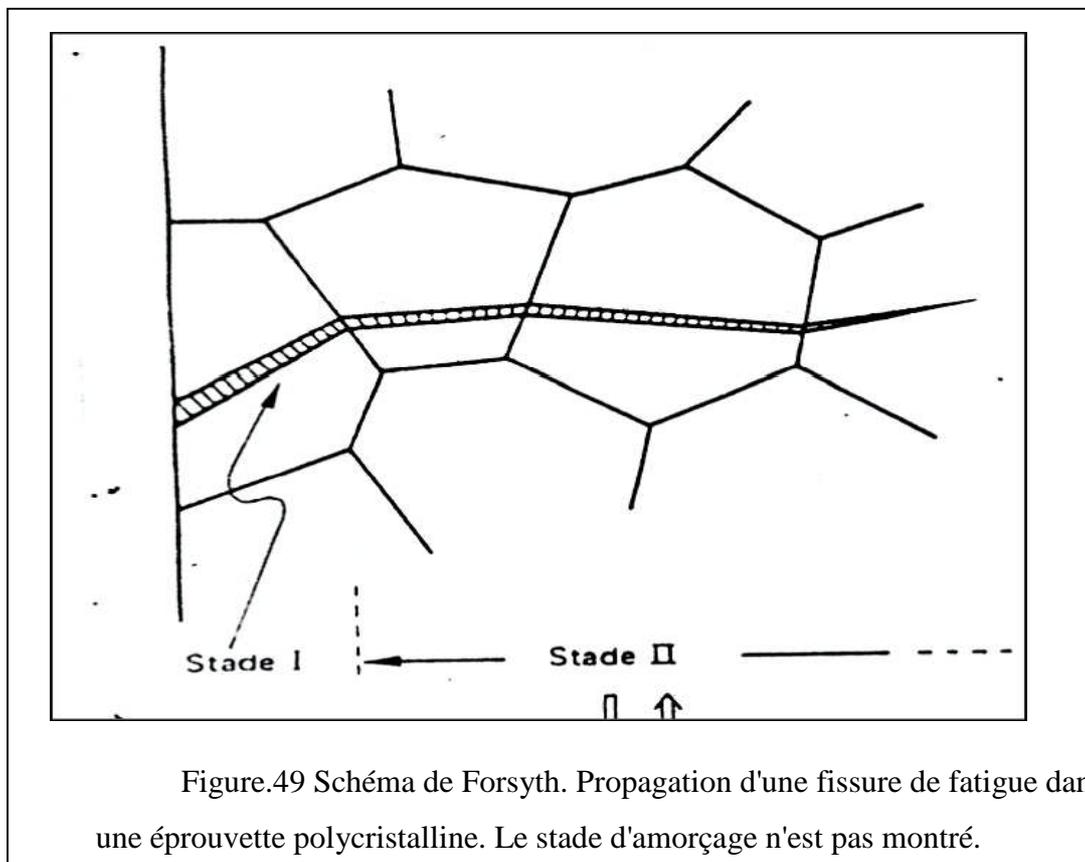
Une déformation plastique localisée est nécessaire pour amorcer une microfissure. Elle se produit en des points où existe une concentration de contrainte, par suite des irrégularités de surface, des inclusions, des jonctions de plusieurs joints de grains. Cet effet peut être exalté en surface par des facteurs macroscopiques tels que les rayures, les entailles, les filets, les raccordements sans congé. Localement on se trouve en présence de fatigue plastique. Pour comprendre le mécanisme d'amorçage, on s'adresse donc aux examens de matériaux de monoou polycristallins, déformés en sollicitation oligocyclique. Le va et vient des dislocations dans les bandes persistantes produit des défauts ponctuels, d'où un accroissement de volume et parfois la formation de pores, et des irrégularités de surface, sous forme d'extrusions et d'intrusions. Les intrusions servent d'amorcer de microfissures qui se développent par décohérence en cisaillement. Tous les facteurs métallurgiques qui favorisent des bandes de glissement localisées réduisent la durée du stade d'amorçage. Les microfissures peuvent ainsi être amorcées aux inclusions et aux jonctions de plusieurs joints de grains.

Stade I de la propagation

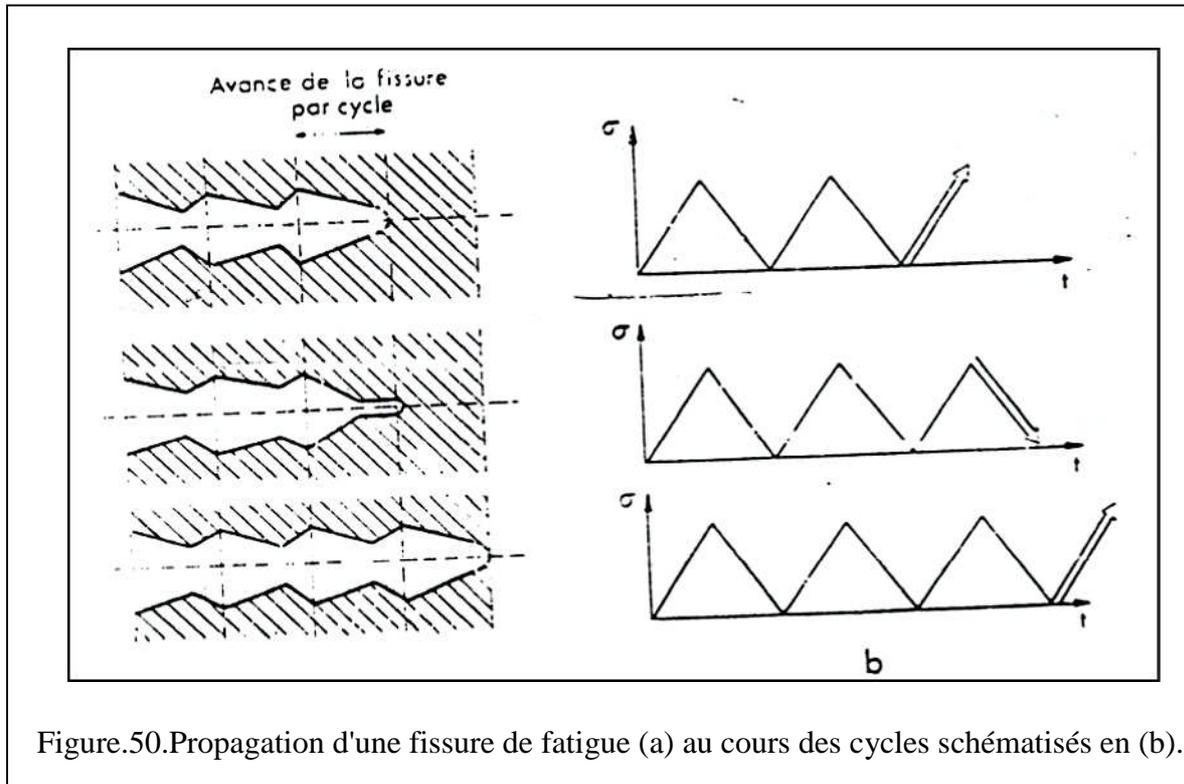
Les microfissures formées par les divers mécanismes évoqués au paragraphe précédent, progressent en restant dans le plan de glissement initial où elles sont apparues, et en s'étendant au plus dans quelques grains à vitesse lente (quelques Å par cycle). La déformation en tête de fissure, et la vitesse de propagation, dépendent étroitement de l'aptitude au glissement dévié (formation de cellules ou structures planaires). Dans les matériaux techniques le stade I peut ne pas apparaître, car la présence d'entailles, d'inclusions qui se fissurent... conduit tout de suite au stade II

Stade II de propagation

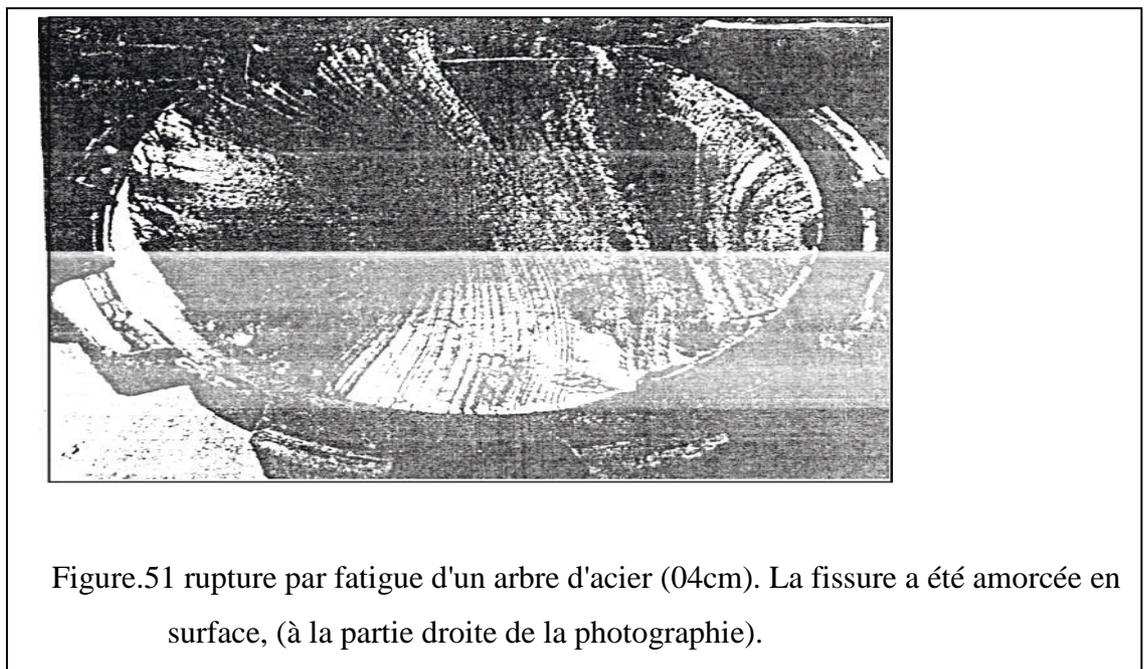
La fissure progresse dans le plan où la contrainte normale est maximale, donc suivant une section droite pour une sollicitation uniaxiale. La fissure est transcristalline et conserve une direction générale avec des ramifications et des changements de directions locaux. La déformation accompagnant chaque cycle se localise à l'extrémité de la fissure, par suite de concentration de contrainte. La fissure progresse à travers une zone déformée qui la précède et qui possède une structure double: une zone centrale qui subit un écrouissage cyclique, une zone périphérique (jusqu'à - 1mm) dans laquelle la déformation, monotone et faible, se produit à l'ouverture de la fissure. La microscopie électronique a confirmé l'existence de cette double zone plastifiée.



Le mécanisme de progression est schématisé sur la figure 50. L'extrémité de la fissure s'ouvre durant l'augmentation de la charge, et se referme partiellement par déformation plastique durant la décharge. Ce processus donne souvent lieu à un faciès strié de la cassure, observable en microscopie électronique (fig.123) chaque strie correspondant à un cycle. Le milieu ambiant joue un rôle important (notamment par oxydation des surfaces faiblement ouvertes: absence de stries sous vide).



La mécanique de la rupture s'applique à ce stade: elle permet de prévoir le rayon de la zone plastifiée cyclique r_c et de la vitesse de fissuration:



Où ΔK est la variation du facteur d'intensité de contrainte correspondant aux contraintes appliquées maximales et minimales, R_e la limite d'élasticité, c la longueur de fissure. La loi de Paris est généralement bien suivie, à partir d'un certain seuil; dans les aciers m-4.

c) rupture finale

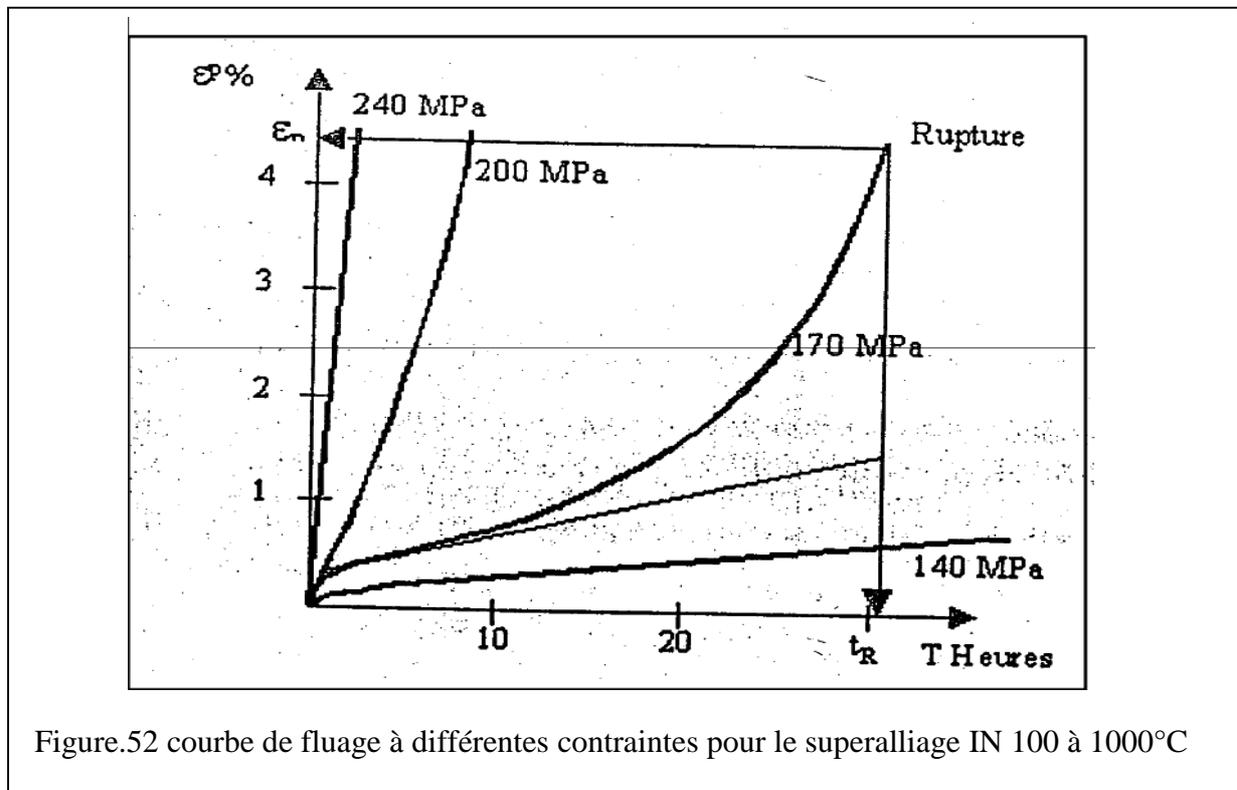
Lorsque la fissure atteint une dimension telle que $K = K_c$.

La rupture brutale de la pièce intervient. Les deux parties de la cassure, correspondant au stade II et à la rupture brutale se distinguent bien à l'œil.

Remarque: le diagramme classique de Wohler peut être complété par des courbes correspondant à des contraintes seuils pour l'amorçage, le stade I ou la stade II- ce qui permet de faire la jonction avec le processus de fatigue plastique qui se produisent en tête de fissure.

5.5.12. La résistance au fluage

Le fluage est un phénomène observé lorsque l'on emploie les matériaux au dessus d'une certaine température. Pour les métaux, ce phénomène est sensible à partir du 1/3 de la température absolue de fusion. Pour les polymères, il peut être observé à température ambiante (les 2/3 de la température de transition vitreuse T_g). Il se traduit par la déformation lente et irréversible (déformation visco-plastique) du matériau lorsque celui-ci est soumis à une contrainte. La figure 52 ci-dessous représente l'allure typique d'une courbe de fluage classique.



Ces courbes mettent en évidence trois phases:

- une phase de fluage primaire au cours de laquelle l'écroutissage du matériau engendre une diminution de la vitesse de fluage initialement très grande; cette phase est assez bien représentée par la loi d'Andrade: $\dot{\epsilon} = A t^{-n}$ ou A et n sont des paramètres du matériau fonction de la température;
- une phase de fluage secondaire caractérisée par une vitesse de fluage constante fonction de la contrainte qu'exprime la loi de Norton:

$$\dot{\epsilon} = \left(\frac{\sigma}{\lambda} \right)^N$$

Où N est d'autres paramètres du matériau qui dépendent de la température;.

- une phase de fluage tertiaire caractérisée par une augmentation régulière de la vitesse de fluage et conduisant à la rupture (R) .

5.5.13. Résistance à l'usure

En technologie, on différencie entre l'usure morale et l'usure physique. On caractérise les machines, appareils, équipements, etc., comme usure morale, si elles sont posées extérieurement des ateliers de fabrication, elles peuvent être encore fonctionnelles à cause

- Du développement technique, et par suite, elles seront remplacées.
- De manque de productivité.
- Par manque de maintenance technique

L'usure physique dans le sens technique, est défini comme un processus caractérisé par une attaque mécanique, en première ligne par un frottement conduisant à une perte progressive de matière en surface d'un corps solide par séparation de petites particules, donc c'est un changement de forme non voulue de la surface. L'usure peut avoir lieu dans un mouvement relatif entre un objet et son milieu gazeux liquide ou solide. Le plus souvent l'usure est accompagnée par des phénomènes de corrosion où ces derniers ne sont pas clairs à séparer de l'usure. Même les connaissances et résultats obtenus pour les phénomènes d'usure n'ont pas une validité générale pour simplifier le danger de ce phénomène. Les pertes occasionnées par l'usure dans l'industrie mondiale s'élèvent annuellement à plusieurs millions de tonnes de métaux. A cause de l'usure, beaucoup de machines et équipements sont remplacés, le plus souvent, avec d'énormes dépenses. Par exemple, aux Etats Unis, on estime ces pertes à 2,3 kg d'acier pour chaque tonne de minerais traitée. Il n'est pas possible d'indiquer par l'intermédiaire d'une certaine valeur caractéristique la tenue à l'usure d'un métal vis-à-vis des différentes contraintes ou sollicitations d'usure. L'utilisation économique d'un métal est défini seulement par les différents essais d'usure et pour des sollicitations bien déterminées.

Une analyse du processus indique que la tenue à l'usure ou le phénomène d'usure sont influencés par

- Les métaux accouplés.
- La rugosité des couches limites (surface, lubrification).
- Le type de mouvement (glissement, roulement, écoulement, chocs, etc.). - La vitesse du mouvement.
- L'enlèvement des particules solides.

6. HYPOTHESES EN RDM

6.1. Buts de la résistance des matériaux

La résistance des matériaux a trois objectifs principaux :

- ◆ la connaissance des caractéristiques mécaniques des matériaux. (comportement sous l'effet d'une action mécanique) l'étude de la résistance des pièces mécaniques.(résistance ou rupture)
- ◆ l'étude de la déformation des pièces mécaniques.

Ces études permettent de choisir le matériau et les dimensions d'une pièce mécanique en fonction des conditions de déformation et de résistance requises.

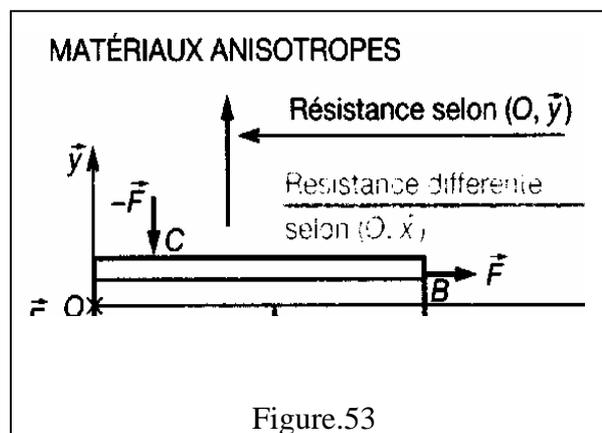
6.2. Définition et hypothèses

Homogénéité

On admet que les matériaux ont les mêmes propriétés mécaniques en tous points.

L'isotropie

On admet que les matériaux ont, en un même point, les mêmes propriétés mécaniques dans toutes les directions, L'isotropie est vérifiée pour les aciers non fibrés (les aciers laminés et forgés ne sont pas isotropes), Elle n'est pas vérifiée pour les matériaux fibrés (bois, matériaux composites...) figure.53



Contraintes (unité : MPa)

Elles caractérisent les actions mécaniques de cohésion qui existent entre les grains de matière.

Déformations

Elles résultent et varient avec les charges appliquées sur les objets, Elles sont mises en évidence par la variation des dimensions, et peuvent être élastiques ou plastiques.

Elasticité

Elle caractérise l'aptitude qu'a un matériau à reprendre sa forme et ses dimensions initiales après avoir été déformé. Un ressort chargé normalement a un comportement élastique.

Plasticité

Un matériau qui ne reprend pas sa forme et ses dimensions initiales après avoir été déformé est dit plastique. La pâte à modeler a un comportement plastique.

Poutres

EX.1. Une poutre est un solide engendré par une surface plane S (ou **section droite** de la poutre) dont le C.D.G. décrit une courbe C , appelée ligne moyenne.

Le repère $R_S = (G_S, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est construit en prenant :

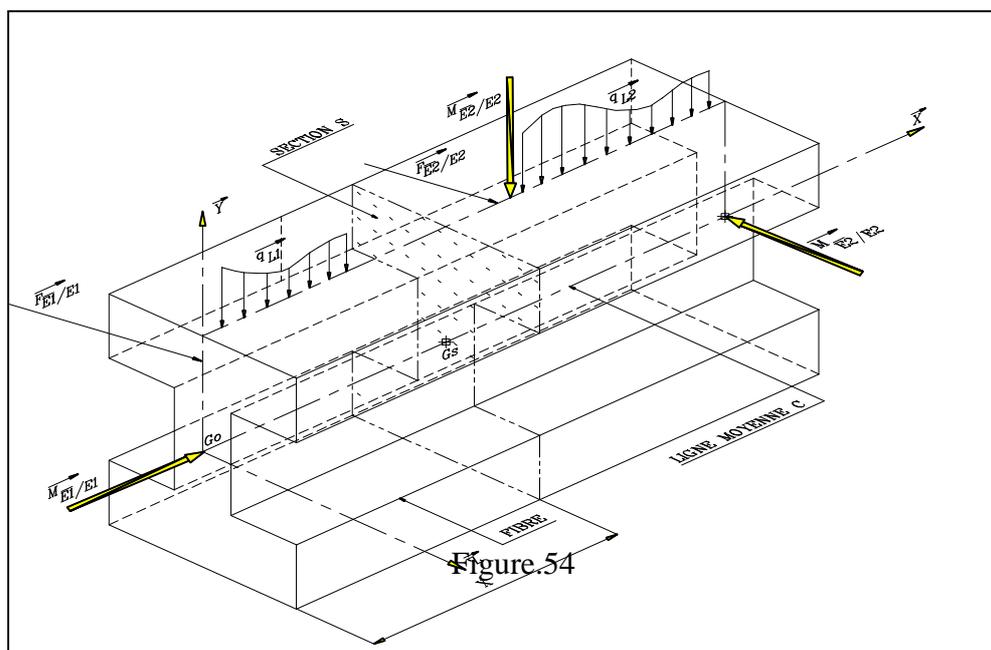
L'axe \vec{X} tangent en G_S à la courbe C , soit normal à la section S ,

Les axes \vec{Y} et \vec{Z} appartenant à la section S .

Les solides idéaux sont des poutres présentant:

- des sections droites constantes ou variables lentement en dimensions et en forme
- des dimensions longitudinales importantes par rapport aux dimensions transversales ($L > 4$ ou 5

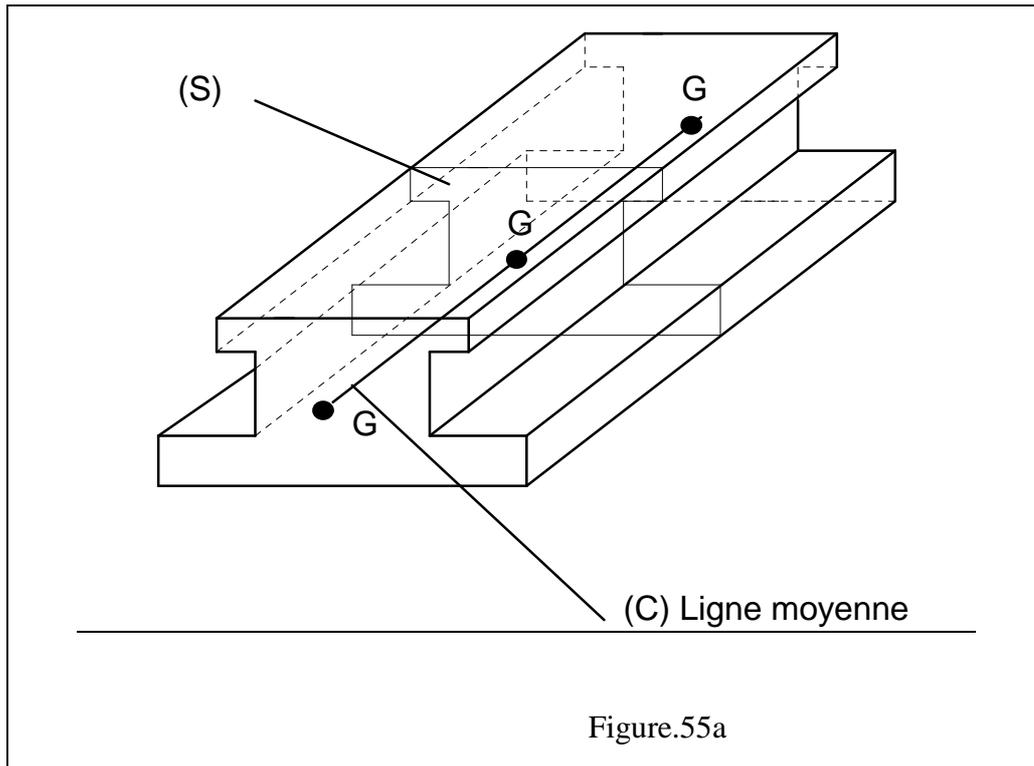
D) La poutre possède un plan de symétrie soit (\vec{X}, \vec{Y}) , soit (\vec{X}, \vec{Z}) . Figure.54



EX.2 : on appelle *poutre* (voir fig.) un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre de surface G décrit une courbe plane (C) appelée *ligne moyenne*. Figure.55a

Les caractéristiques de la poutre sont :

- ligne moyenne droite ou à grand rayon de courbure.
- section droite (S) constante ou variant progressivement.
- grande longueur par rapport aux dimensions transversales.
- existence d'un plan de symétrie.



EX.3

Les notions abordées dans ce cours ne sont valables que pour des solides ayant une forme de poutre ; c'est à dire un solide pour lequel : figure.55b

- ☞ il existe une ligne moyenne, continue, passant par les barycentres des sections du solide ;
- ☞ la longueur L est au moins 4 à 5 fois supérieure au diamètre D ;
- ☞ il n'y a pas de brusque variation de section (trous, épaulements) ;
- ☞ le solide admet un seul et même plan de symétrie pour les charges et la géométrie.

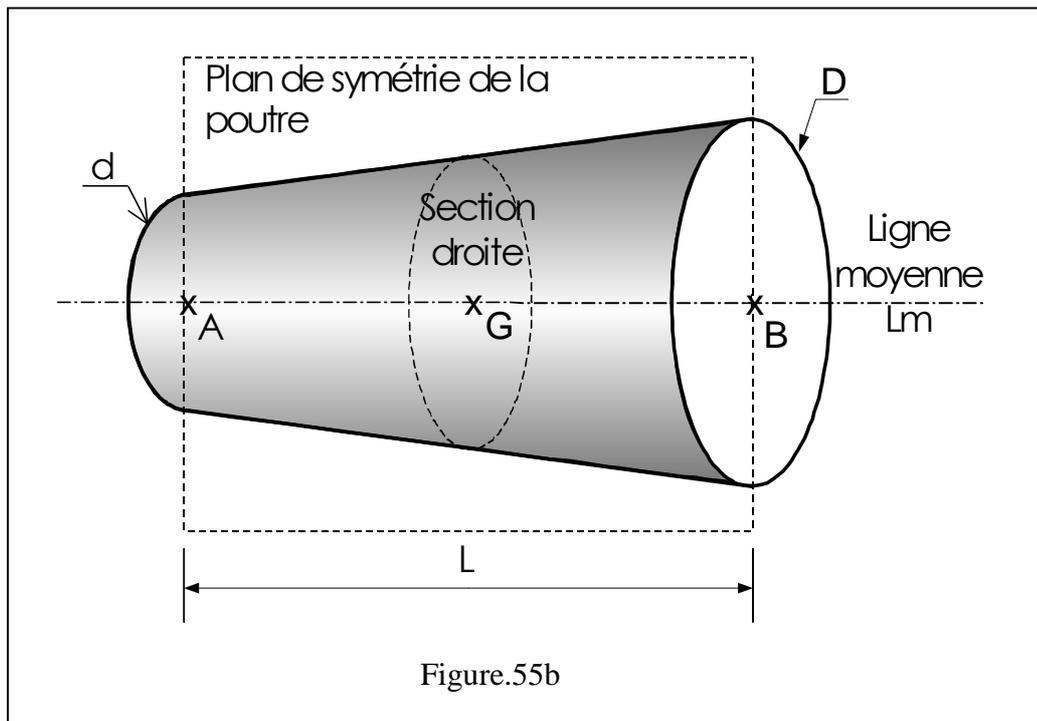


Figure.55b

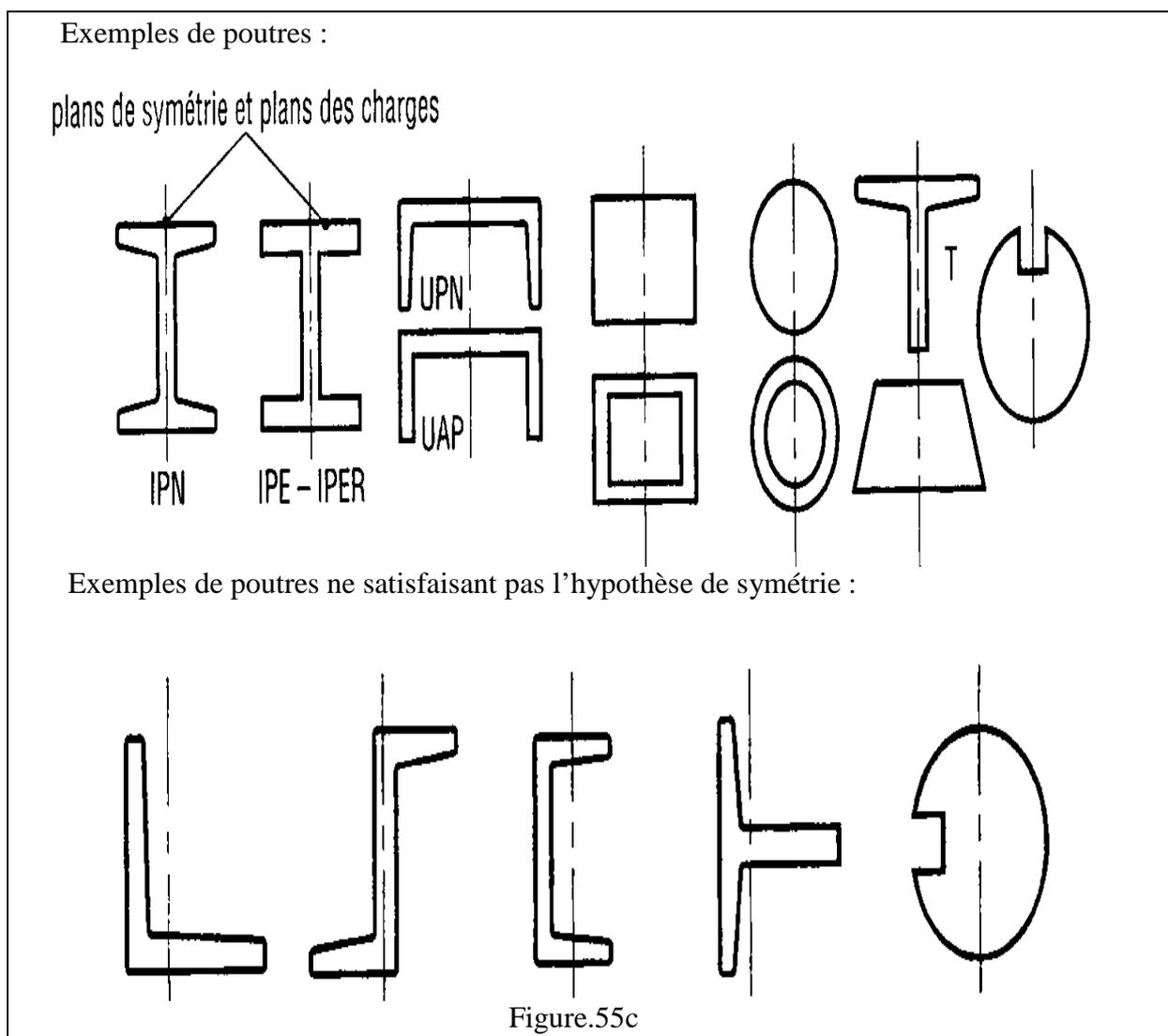


Figure.55c

Les actions mécaniques

Les actions mécaniques, appliquées en un point, sont des vecteurs glissants. Il est impossible de les remplacer par un système d'actions mécaniques "vectoriellement" équivalent (même résultante et même moment en un point A) car les effets physiques (solllicitations) sont différents.

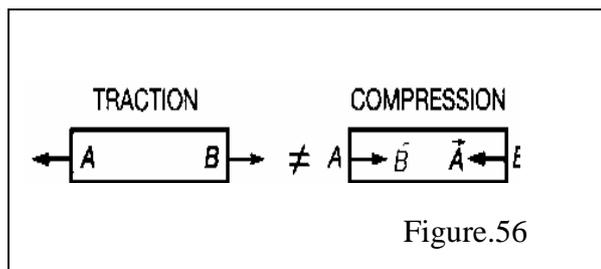
Le chargement de la poutre se fait dans le plan de symétrie de celle-ci.

Le chargement se fait lentement et régulièrement.

Il n'existe que deux types de chargement, soit une Action Mécanique :

- Localisée (ou concentrée) représentée par un glisseur
- Répartie représentée par sa densité linéique q_L en N/m ou surfacique q_s en N/m²

Exemple : Répartition uniforme de la neige sur un toit (charge surfacique) et glisseur équivalent au C.D.G. de la surface enneigée (charge localisée). Figure.56

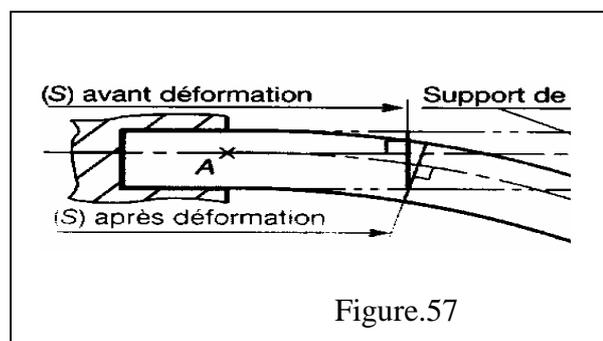


Hypothèses sur l'influence des déformations

Dans le domaine élastique, les déformations sont très faibles, elles ne modifient pas les actions mécaniques calculées par la statique (hypothèse des solides indéformables).

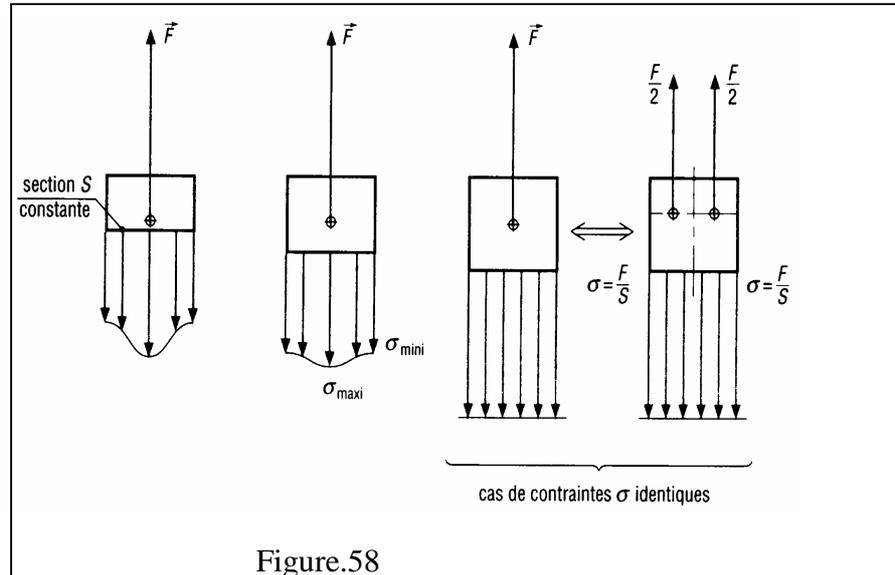
Hypothèse de Navier-Bernoulli

Les sections planes et droites (normales à la ligne moyenne) avant déformation, restent planes et droites après déformation (normales à ligne moyenne déformée). Figure.57



Hypothèse de Barré de Saint-Venant

Dans une section droite (S) éloignée de la zone où les charges sont appliquées ($l > d$), la répartition des déformations et des contraintes ne dépend que des éléments de réduction du torseur des actions mécaniques appliquées. Figure.58



Dans une section droite (S) proche de la zone où les charges sont appliquées ($l < d$), la répartition des déformations et des contraintes dépend de la répartition des charges appliquées.

SUPERPOSITION DES DEFORMATIONS

La déformation en un point M de la poutre due à plusieurs A.M. est égale à la somme des déformations dues à chaque A.M. prises isolément.

SUPERPOSITION DES CONTRAINTES

La contrainte en un point M de la poutre due à plusieurs A.M. est égale à la somme des contraintes dues à chaque A.M. prises isolément.

Définition des liaisons poutre/bâti

Il n'existe technologiquement que quatre appuis principaux :

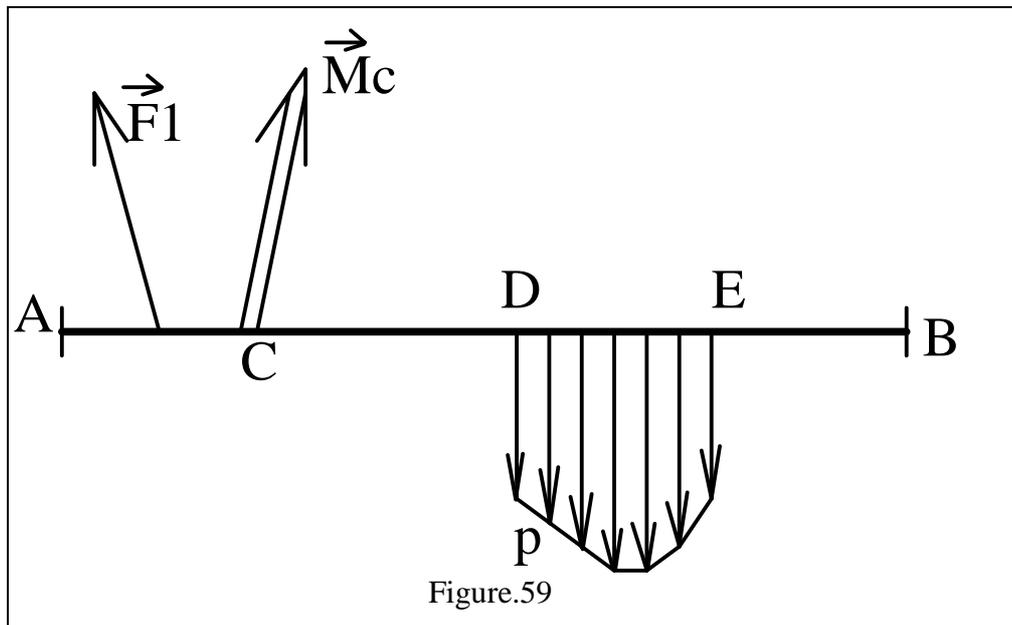
TYPE D'APPUI	RESULTANTE	MOMENT
Un appuis simple d'axe \bar{Y} ou \bar{Z}	Perpendiculaire à \bar{X}	Nul
Un pivot d'axe \bar{Y} ou \bar{Z}	Appartenant à (\bar{X}, \bar{Y}) ou (\bar{X}, \bar{Z})	Sur \bar{X} (ou nul si problème plan)
Une rotule	Appartenant à (\bar{X}, \bar{Y}) ou (\bar{X}, \bar{Z})	Nul
Un encastrement	Quelconque	Quelconque

. Les forces extérieures

Plan de symétrie : les forces extérieures seront situées dans le plan de symétrie de la poutre ou alors disposées symétriquement par rapport à ce plan.

Types d'actions mécaniques extérieures : deux types d'actions mécaniques peuvent s'exercer sur la poutre (voir fig59) :

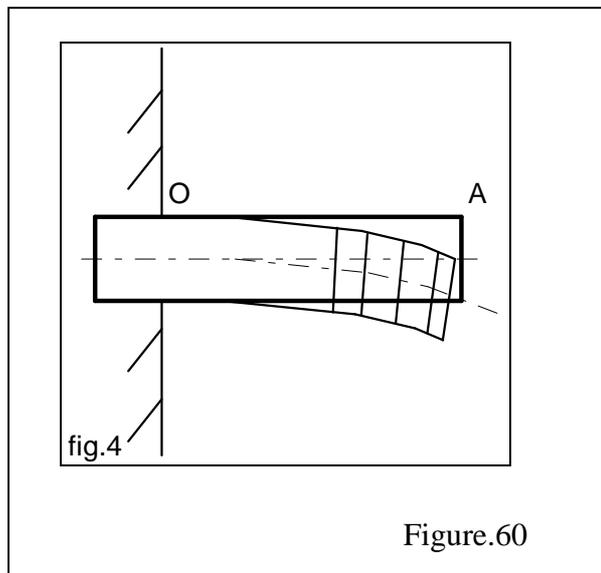
- charges concentrées (\vec{F}_1 ou moment \vec{M}_c)
- charges réparties p sur DE. (exprimées en N/m).



Les déformations

Les déformations étant petites devant les dimensions de la poutre, les actions s'exerçant sur celle-ci seront calculées à partir du principe fondamental de la statique.

Les supports des forces seront eux considérés comme constants.figure.60



◇ **Navier & Bernoulli** : Les sections planes normales aux fibres avant déformation demeurent planes et normales aux fibres après déformation.

- ◇ **Barré de St Venan** : Les résultats obtenus par la RDM ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des efforts concentrés. Figure.61

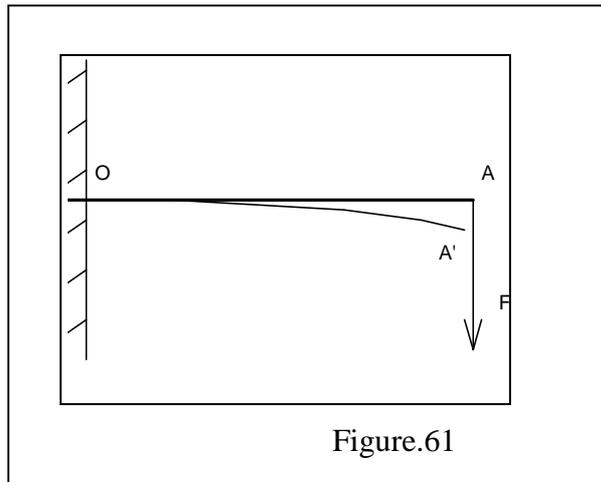


Figure.61

TORSEUR DES EFFORTS DE COHESION

Définition

Soit une poutre (E) en équilibre sous l'action de n actions extérieures. On associe à cette poutre un repère R (x,y,z) dont l'axe x coïncide avec la ligne moyenne de la poutre. Coupons la poutre (E) par un plan (P) orthogonal à sa ligne moyenne, situé à l'abscisse x. On définit ainsi deux portions de poutre (E1) et (E2). Figure.62

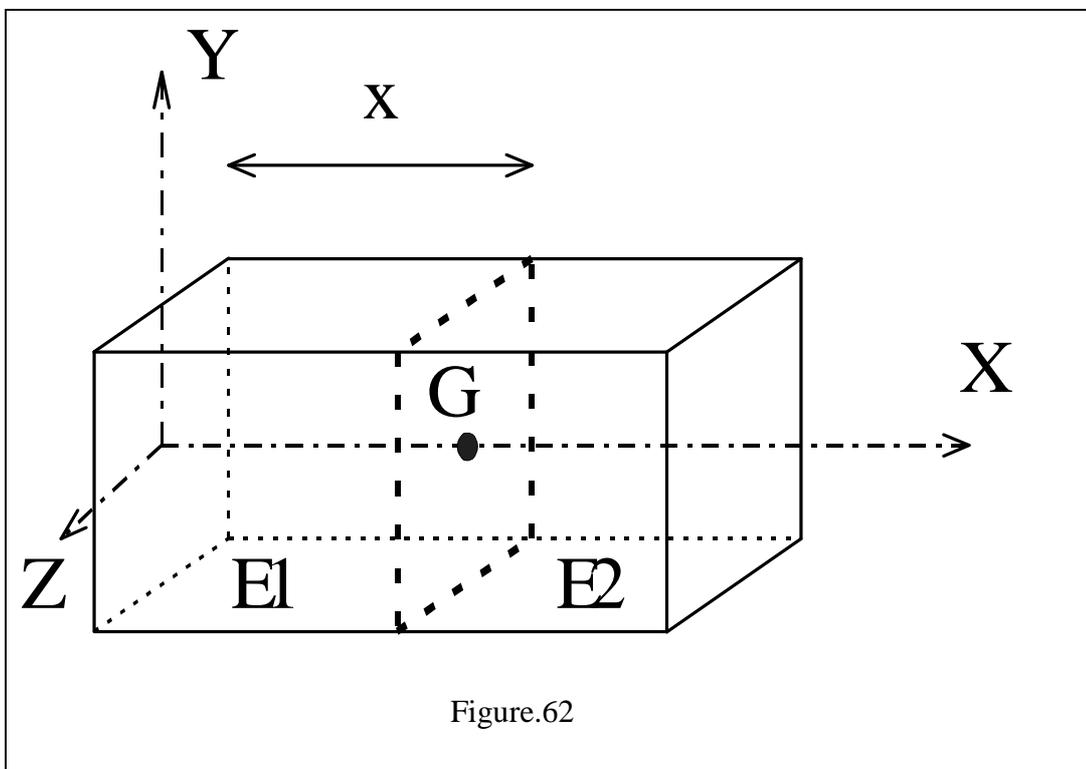


Figure.62

(E) étant en équilibre, on peut écrire : $\{\bar{E} \rightarrow E\} = \{0\}$

(E1) étant en équilibre, on peut écrire : $\{\bar{E} \rightarrow E1\} + \{E2 \rightarrow E1\} = \{0\}$

(E2) étant en équilibre, on peut écrire : $\{\bar{E} \rightarrow E2\} + \{E1 \rightarrow E2\} = \{0\}$

On en déduit :

$$\boxed{\{E2 \rightarrow E1\} = -\{\bar{E} \rightarrow E1\} = \{\bar{E} \rightarrow E2\}}$$

$\{E2 \rightarrow E1\}$ est le torseur qui traduit l'action de contact de (E2) sur (E1). Cette action est due aux efforts de cohésion qui permettent à la poutre de ne pas se "disloquer" sous l'effet d'actions extérieures.

La RDM vise en particulier à vérifier qu'en aucun point de la poutre les efforts de cohésion à "transmettre" ne soient supérieurs aux capacités du matériau.

On note :

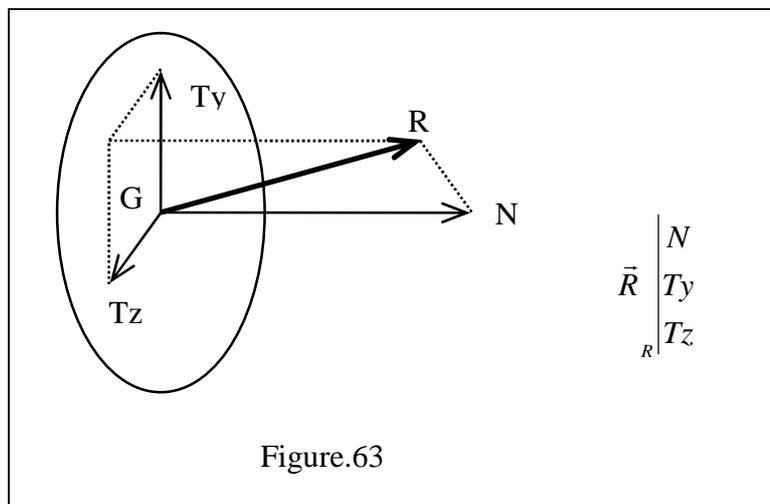
$$\boxed{\{Cohésion\} = \{\bar{E} \rightarrow E2\} = -\{\bar{E} \rightarrow E1\}}$$

Composantes du torseur de cohésion

Dans le torseur de cohésion, on peut faire apparaître la résultante et le moment qui dépendent de la position de la section (x).

$$\{Cohésion\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}(x) \\ \vec{M}_G(x) \end{Bmatrix}$$

La résultante figure.63



- N : effort normal, projection de R sur la normale extérieure (x).
- Ty et Tz : efforts tranchants, projections de R sur le plan de section droite

Le moment résultant

De la même manière, on retrouve pour les moments, 3 composantes :

- M_T : moment de torsion, projection du moment sur la normale extérieure.
- M_{fy} et M_{fz} : moments de flexion, projection du moment sur le plan de section droite.

$$\text{Soit : } \vec{M}_G \begin{matrix} | \\ M_t \\ | \\ M_{fy} \\ | \\ M_{fz} \\ | \\ R \end{matrix}$$

Toutes ces composantes N, Ty, Tz, M_T, M_{fy} et M_{fz} dépendent de la position de la section droite (x). On peut donc représenter leurs évolutions à l'aide de diagrammes.

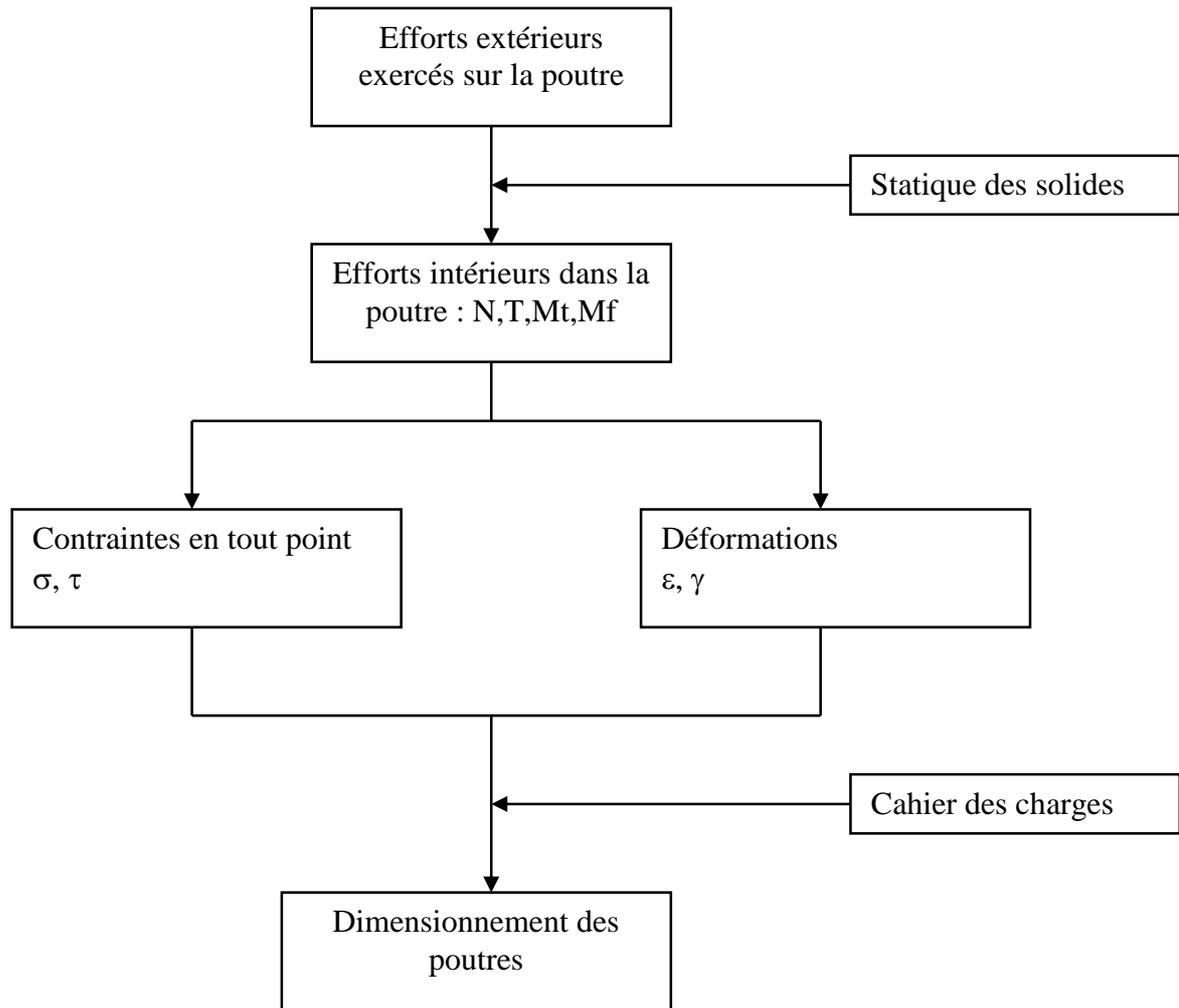
Les sollicitations

Suivant les éléments de réduction non-nuls du torseur de cohésion (N, Ty, Tz, M_T, M_{fy} et M_{fz}) on peut alors identifier le type de sollicitation que subit la poutre, à savoir :

Composantes		Sollicitation
N	> 0	Extension (traction)
	< 0	Compression
Ty		Cisaillement
Tz		
Mt		Torsion
Mfy		Flexion
Mfz		

Lorsque l'on a une seule de ces sollicitations on parle de *sollicitation simple*, sinon on a un problème de *sollicitations composées*.

6.3. Notion des contraintes – Principe de détermination



Contrainte en un point M d'une section S

La contrainte caractérise les liaisons mécaniques internes au matériau (représentées par le torseur de cohésion $_{GS}\{T_{coh}\}_R$ sur chaque élément de surface dS de la section S quelconque. On peut choisir dS aussi petit que l'on veut.

Unité : le N/mm^2 soit le Mpa

Rappel : $1 \text{ Mpa} = 10^6 \text{ Pa} = 1 \text{ N/mm}^2 = \text{environ } 10 \text{ bars}$

DEFINITION

La contrainte \vec{C} est le rapport entre l'action mécanique $d\vec{F}$, qui s'exerce sur l'élément de surface dS de la section S , SUR la surface dS .

$$\vec{C} = \frac{d\vec{F}}{dS} = \sigma \cdot \vec{x} + \tau_y \cdot \vec{y} + \tau_z \cdot \vec{z}$$

tel que $\left| \begin{array}{l} \sigma : \text{contrainte normale} \\ \tau_y \text{ et } \tau_z : \text{contraintes tangentielles} \end{array} \right.$

CONTRAINTE NORMALE

Considérons un torseur de cohésion $G_S \{T^{coh}\}_R$ dont la résultante \vec{R} n'a qu'une composante N sur \vec{X} .

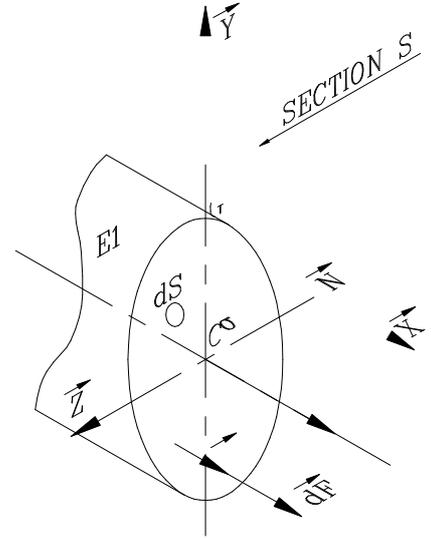
$$\vec{R} = N \cdot \vec{x} = \sum_S d\vec{F} = \sum_S \vec{C} \cdot dS = \sum_S \sigma \cdot \vec{x} \cdot dS$$

$$N = \sum_S \sigma \cdot ds$$

Si nous supposons une répartition constante de la contrainte σ sur S

$$\Rightarrow N = \sum_S \sigma \cdot dS = \sigma \cdot \sum_S dS = \sigma \cdot S$$

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{S}}$$



CONTRAINTES TANGENTIELLES

Considérons un torseur de cohésion $G_S \{T^{coh}\}_R$ dont la résultante \vec{R} n'a qu'une composante T_y sur \vec{Y} .

$$\vec{R} = T_z \cdot \vec{z} = \sum_S d\vec{F} = \sum_S \vec{C} \cdot dS = \sum_S \tau_z \cdot \vec{z} \cdot dS$$

$$T_z = \sum_S \tau_z \cdot ds$$

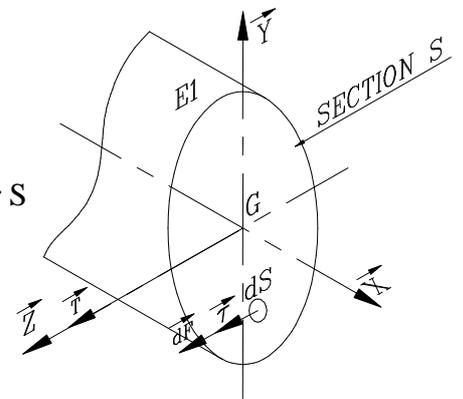
Si nous supposons une répartition constante de la contrainte τ_y sur S

$$\Rightarrow T_z = \sum_S \tau_z \cdot dS = \tau_z \cdot \sum_S dS = \tau_z \cdot S$$

$$\boxed{\tau_z = \frac{T_z}{S}}$$

de même

$$\boxed{\tau_y = \frac{T_y}{S}}$$



Relations entre torseur de cohésion et contrainte

$$\overrightarrow{R_{E1 \rightarrow E2}} = \vec{N} + \vec{T} = \sum_S (\vec{\sigma} + \vec{\tau}_y + \vec{\tau}_z) dS \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{R_{E1 \rightarrow E2}} = \vec{N} + \vec{T} = (\vec{\sigma} + \vec{\tau}_y + \vec{\tau}_z) \cdot S$$

$$\overrightarrow{M_{G_{E1/E2}}} = \sum_S \overrightarrow{GM} \wedge (\vec{\sigma} + \vec{\tau}_y + \vec{\tau}_z) dS$$

Exemple

Sur l'exemple précédent en déduire la contrainte tangentielle maximale et sa position sur la poutre.

$$\tau_y = \frac{T_y}{S} = \frac{750}{19,63} = 38,2 \text{ MPa} . \text{ Cette contrainte tangentielle existe sur la partie CB de la poutre}$$

Notions sur les coefficients de sécurité

Pour qu'une structure (machine, véhicule...) puisse supporter en toute sécurité les charges normalement la sollicitent, il suffit qu'elle puisse résister à des charges plus élevées. La capacité à supporter ces charges constitue la résistance de la structure. Le coefficient de sécurité s est

$$s = \frac{\text{charge admissible}}{\text{charges exercées}} = \frac{\text{résistance réelle}}{\text{résistance nécessaire}}$$

La sécurité est obtenue si , sous charge

- les déformations du matériau restent élastiques
- la rupture du matériau n'est pas atteinte

Donc

$$s = \frac{R_e}{R_p} = \frac{\text{résistance élastique}}{\text{résistance pratique}}$$

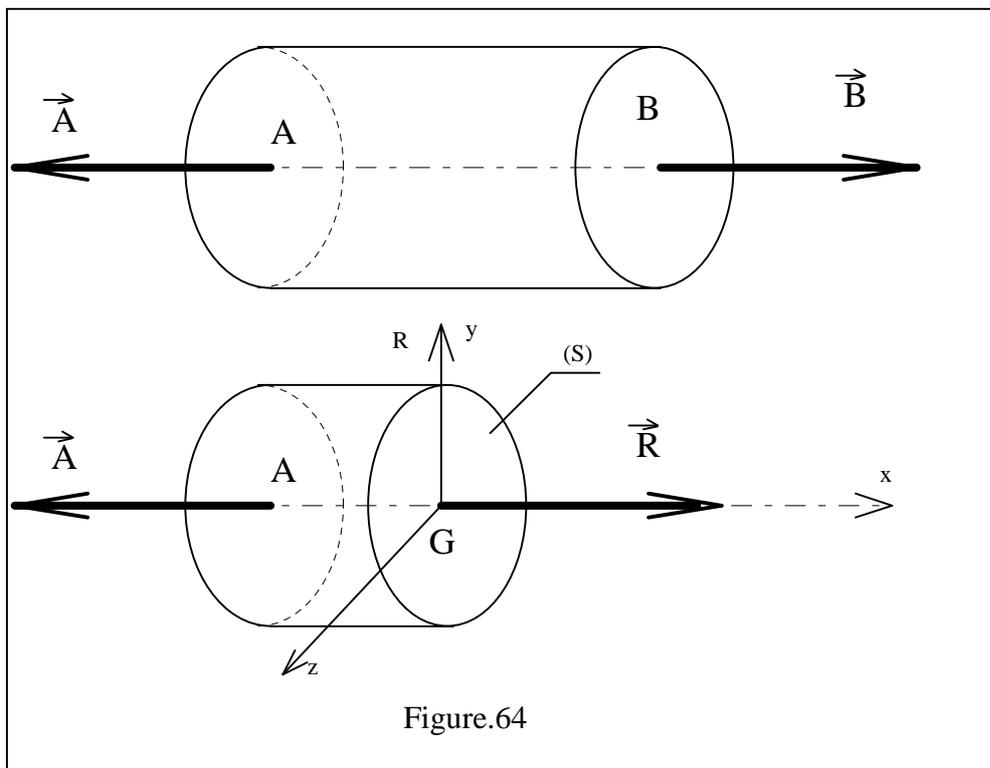
Où
$$s = \frac{R_r}{R_p} = \frac{\text{résistance à la rupture}}{\text{résistance pratique}}$$

7. TRACTION

7.1. TRACTION

7.1.1 Définition

Une poutre est sollicitée à la traction simple lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées, appliquées au centre de surface des sections extrêmes et qui tendent à l'allonger. Figure.64

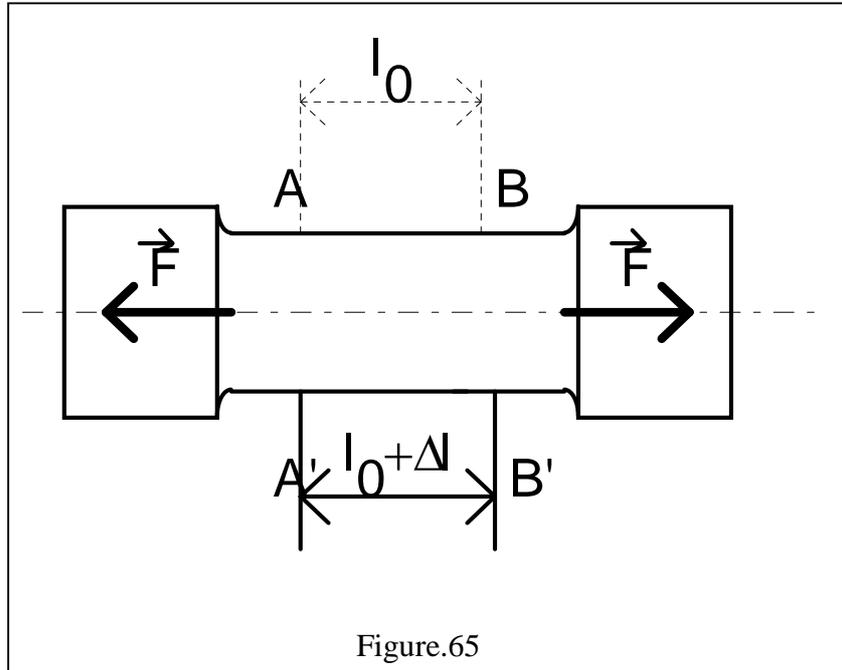


Les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion s'expriment par :

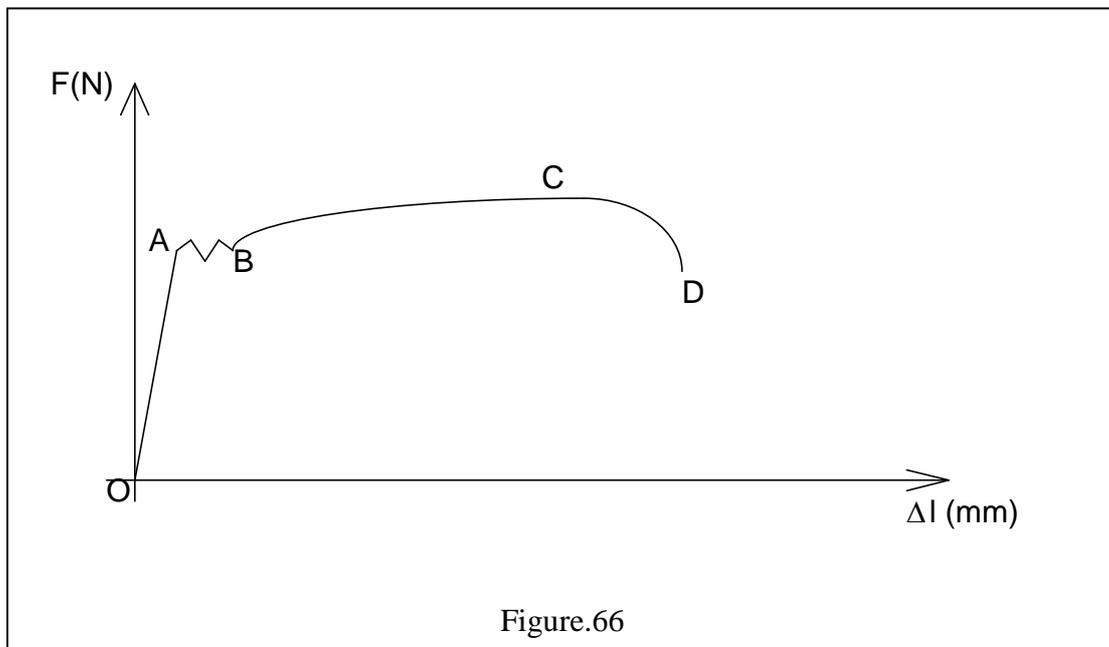
$$\{Cohésion\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \text{Avec } N > 0$$

7.1.2 Essai de Traction

Une éprouvette en acier est sollicitée à l'extension par une machine d'essai, qui permet de déterminer l'allongement de l'éprouvette en fonction de l'effort qui lui est appliqué.



On obtient alors la courbe d'essai ci-dessous figure.66



Analyse de la courbe obtenue

- ◇ **Zone OA** : c'est la zone des déformations élastiques. Si l'on réduit la valeur de F jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette retrouve sa longueur initiale. Dans cette zone, l'allongement est proportionnel à l'effort d'extension. Des essais effectués avec des éprouvettes de dimensions différentes permettent de constater que pour un même matériau, *l'allongement unitaire* ($\Delta l / l_0$) est proportionnel à l'effort unitaire (F / S_0). Les sections droites et planes de l'éprouvette restent droites et planes pendant l'essai.
- ◇ **Zone ABCD** : c'est la zone des déformations permanentes. Si l'on réduit la valeur de F jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette ne retrouve pas sa longueur initiale.

On ne s'intéressera (pour l'instant) qu'à la zone des déformations élastiques.

7.1.3 Déformations élastiques

La propriété constatée ci-dessus a permis pour différents matériaux d'établir la relation :

$$\frac{N}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$$

Unités : F en Newton
S en mm²
E en MPa (N/mm²)
 Δl et l en mm.

E est une caractéristique du matériau appelée **module d'élasticité longitudinal** ou **module de Young**.

Matériau	Fontes	Aciers	Cuivre	Aluminium	Tungstène
E (MPa)	60000 à 160000	200000	120000	70000	400000

Lors de cet essai, on met aussi en évidence une autre caractéristique de l'élasticité ; il existe un rapport constant entre la contraction relative transversale ($\Delta d / d$) et l'allongement relatif longitudinal ($\Delta l / l$). On peut écrire :

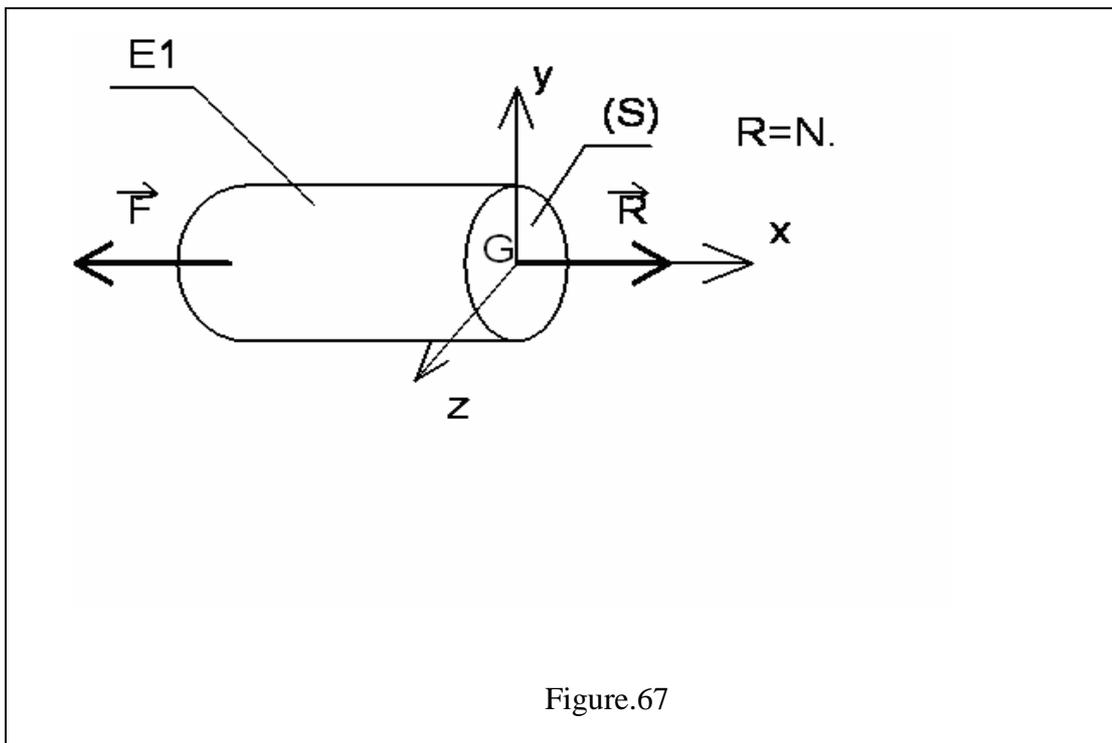
$$\frac{\Delta d}{d} = \nu \frac{\Delta l}{l}$$

Unités : ν sans unité
 δ et l en mm.

ν est aussi une caractéristique du matériau (coefficient de Poisson), il est de l'ordre de 0,3 pour les métaux.

7.1.4 Contraintes

Soit (E1) le tronçon de la poutre (E) issu de sa coupure par un plan orthogonal à sa ligne moyenne figure.67.



Le tronçon (E1) est en équilibre sous l'action de F et des efforts de cohésion dans la section droite (S). Soit S l'aire de la section droite (S). On définit la contrainte σ dans la section droite (S) par la relation :

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

avec σ : contrainte normale d'extension ($\sigma > 0$) en MPa.

N : effort normal d'extension en Newton.

S : aire de la section droite (S) en mm². La contrainte permet de "neutraliser" la surface et

par conséquent de comparer des éprouvettes de sections différentes.

7.1.5. Loi de HOOKE

Nous avons déjà vu que $\sigma = \frac{N}{S}$ et que $\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$, on peut en déduire que :

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l} = E \cdot \epsilon$$

Loi de Hooke

$\frac{\Delta l}{l}$ est l'allongement élastique unitaire suivant x, il généralement noté ϵ

Unités : σ en Mpa

E en Mpa

ϵ sans unité

7.1.6. Caractéristiques mécaniques d'un matériau

◇ **Contrainte limite élastique en traction σ_e**

C'est la valeur limite de la contrainte dans le domaine élastique, appelée aussi limite d'élasticité R_e . Pour l'acier, cette valeur est voisine de 300 MPa.

◇ **Contrainte limite de rupture en traction σ_r**

◇ C'est la valeur limite de la contrainte avant rupture de l'éprouvette, appelée aussi nommée résistance à la traction R. Pour l'acier, cette valeur est voisine de 480 MPa.

◇ **Allongement A%**

$$A\% = \frac{l - l_0}{l_0} * 100 \quad \text{avec}$$

◇ l_0 : longueur initiale de l'éprouvette

◇ l : longueur de l'éprouvette à sa rupture. Pour l'acier, on constate des valeurs de A% voisines de 20%.

1.1.7. Condition de résistance

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale σ doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte pratique à l'extension σ_{pe} .

$$\text{On a : } \sigma_{pe} = \frac{\sigma_e}{S}$$

S est un coefficient de sécurité qui varie de 1,1 à 10 selon les domaines d'application.

La condition de résistance traduit simplement le fait que la contrainte réelle ne doit pas dépasser le seuil précédent, soit :

$$\sigma_{réelle} = \frac{N}{S} < \sigma_{pe}$$

7.3.8. Influence des variations de section

Si le solide étudié présente de fortes variations de sections, les relations précédentes ne s'appliquent plus. On dit qu'il y a concentration de contraintes.

On doit alors pondérer nos résultats à l'aide d'un coefficient k, en posant :

$$\sigma_{\max} = k \cdot \sigma$$

k est le coefficient de concentration de contraintes

Exemples de cas de concentration de contrainte : figure.68

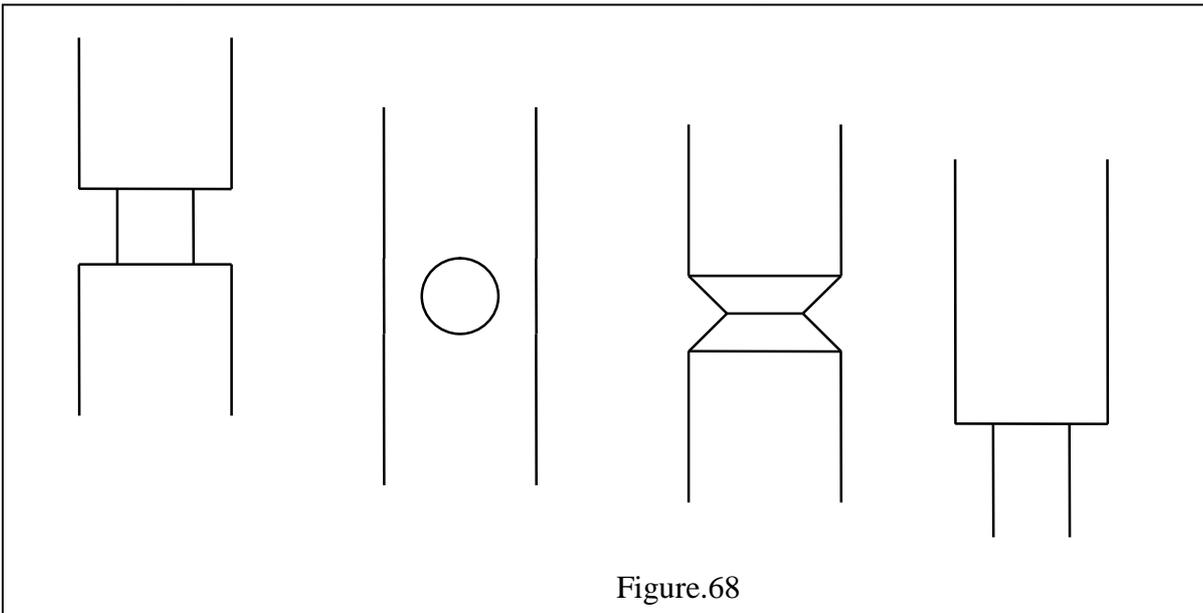
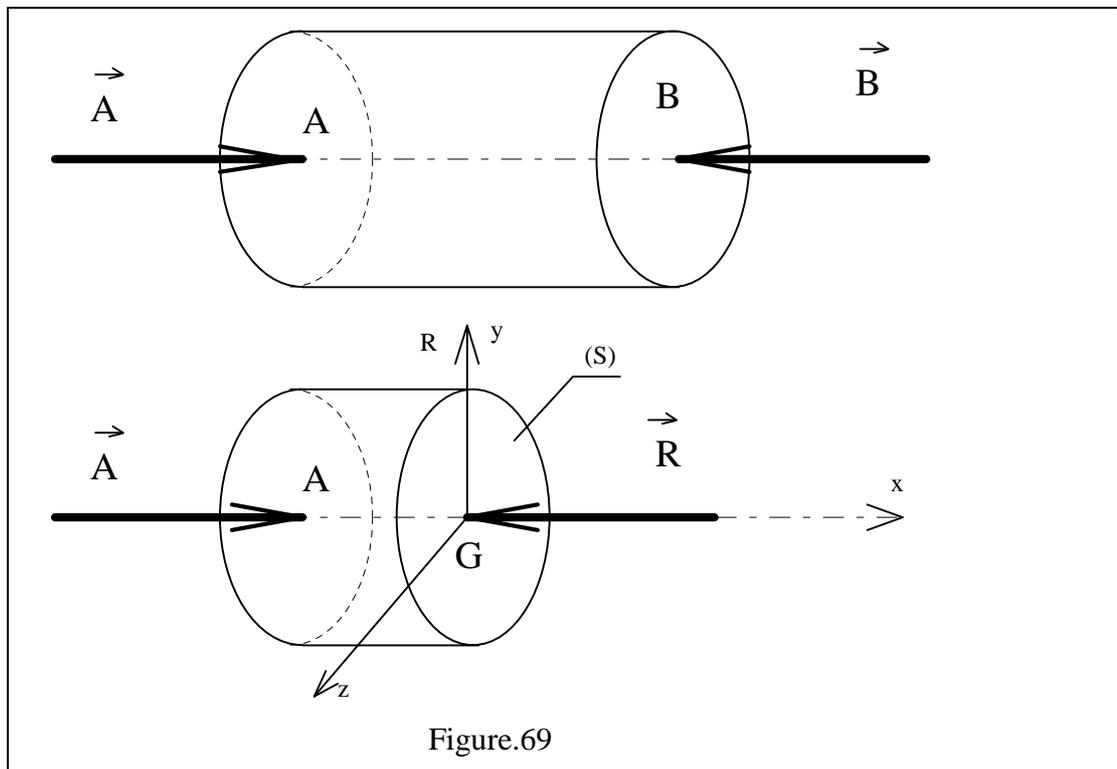


Figure.68

8. COMPRESSION

8.1. Définition

Une poutre est sollicitée à la compression simple lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées, appliquées au centre de surface des sections extrêmes et qui tendent à la raccourcir.



Les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion s'expriment par :

$$\{Cohésion\}_G = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \text{avec } N < 0$$

8.2 Essai de compression

Une éprouvette semblable à celle utilisée pour l'essai d'extension en acier est sollicitée à la compression par une machine d'essai.

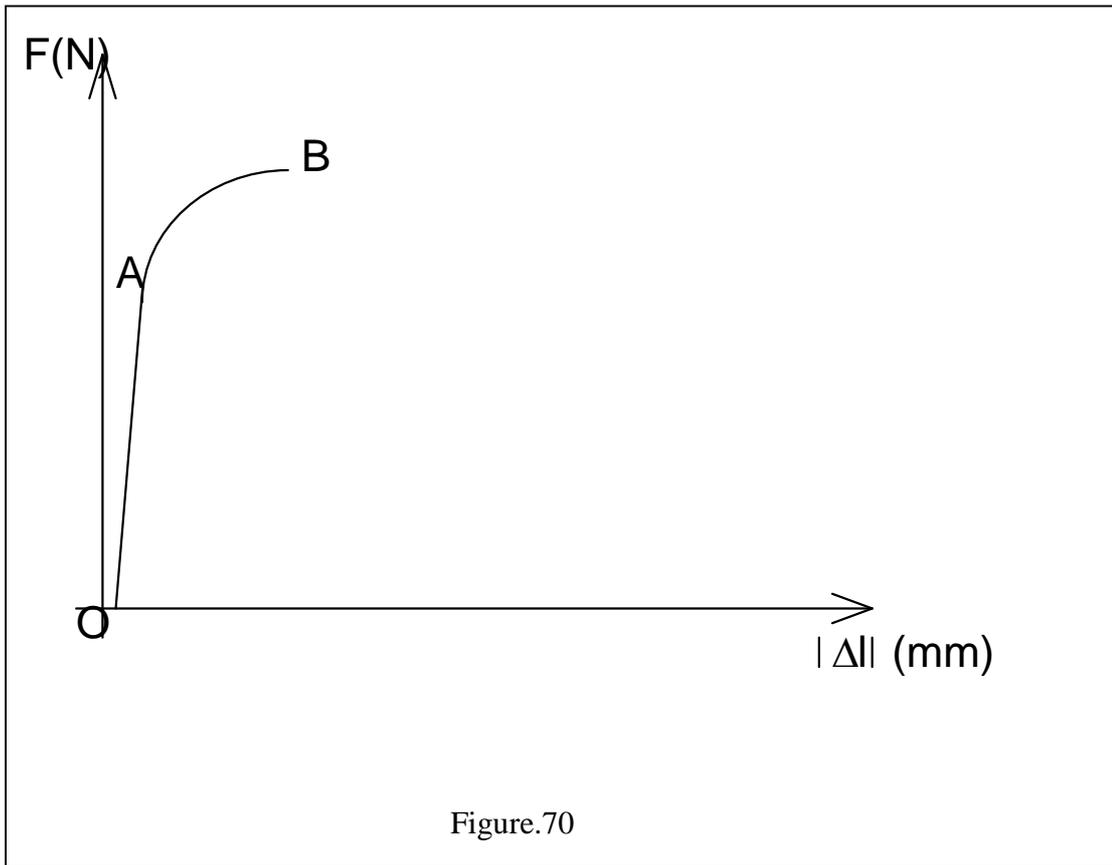


Figure.70

Analyse de la courbe obtenue

◇ **Zone OA** : c'est la zone des déformations élastiques. Si l'on réduit la valeur de F jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette retrouve sa longueur initiale. Dans cette zone, l'allongement est proportionnel à l'effort de compression. Des essais effectués avec des éprouvettes de dimensions différentes permettent de constater que pour un même matériau, l'allongement unitaire ($\Delta l/l_0$) est proportionnel à l'effort unitaire (F/S_0).

Les sections droites et planes restent droites et planes pendant l'essai.

◇ **Zone AB** : c'est la zone des déformations permanentes. Si l'on réduit la valeur de F jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette ne retrouve pas sa longueur initiale.

8.3. Déformations élastiques

La *propriété constatée ci-dessus* a permis pour différents matériaux d'établir la relation :

$$\boxed{\frac{F}{S} = -E \frac{\Delta l}{l}} \quad \text{Avec } \Delta l < 0$$

Pour les aciers, le **module d'élasticité longitudinal E** est le même en compression qu'en extension.

8.4 Contraintes

On définit la contrainte σ dans la section droite (S) par la relation :

$$\sigma = \frac{N}{S} \quad \text{avec : } \sigma < 0 \text{ car } N < 0$$

8.5. Loi de HOOKE

Nous avons déjà vu que $\sigma = \frac{N}{S}$ et que $\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}$, on peut en déduire que :

$$\sigma = E \frac{\Delta l}{l} = E \cdot \varepsilon \quad \text{loi de Hooke}$$

$\frac{\Delta l}{l}$ est le raccourcissement élastique unitaire suivant x, il généralement noté ε

8.6. Condition de résistance

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale σ doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte pratique à l'extension σ_{pe} .

On a :

$$\sigma_{pe} = \frac{\sigma_e}{S}$$

s est un coefficient de sécurité qui varie de 1,1 à 10 selon les domaines d'application.

La condition de résistance traduit simplement le fait que la contrainte réelle ne doit pas dépasser le seuil précédent, soit :

$$|\sigma_{réelle}| = \frac{|N|}{S} < \sigma_{pe}$$

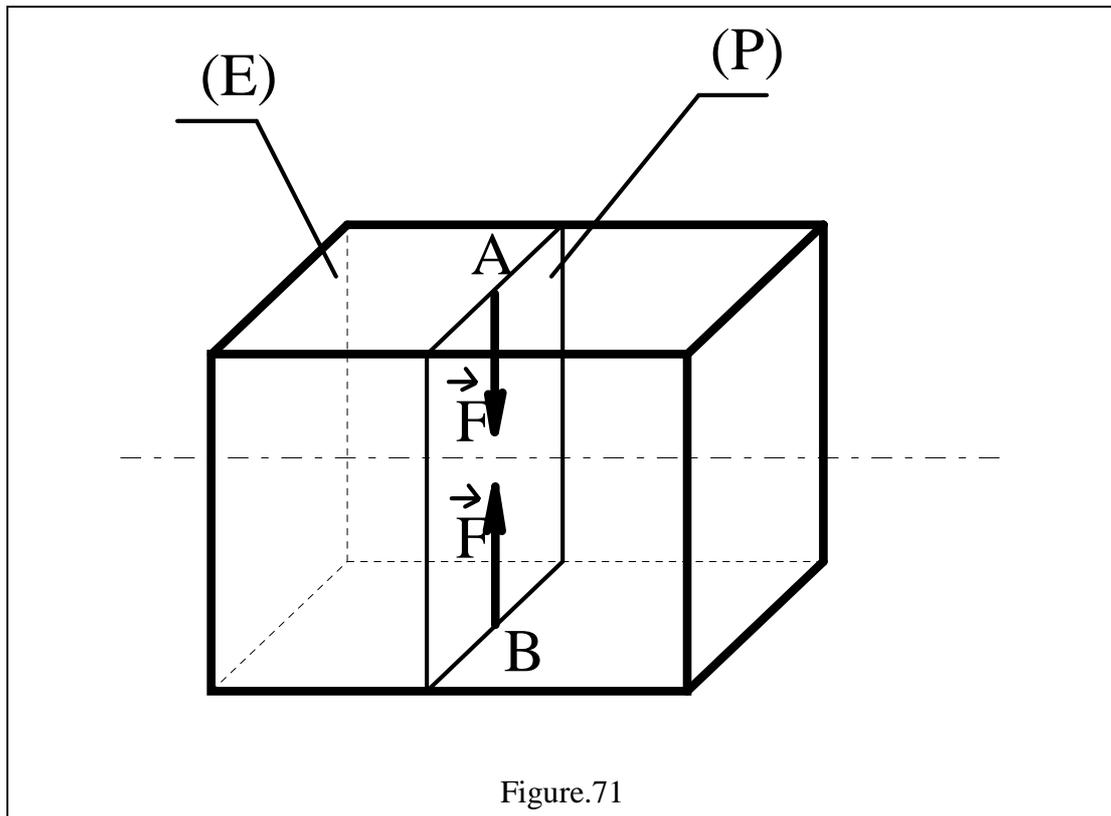
Module de Young E en daN/mm de certains matériaux

matériau	Module de Young daN/mm ²	matériau	Module de Young daN/mm ²
carbures métalliques	55 000	zinc	8 000
tungstène	42 000	alliage d'aluminium	7 000 à 7 500
aciers	17 000 à 28 000	verre	7 000 à 7 500
aciers de construction	20 000 à 22 000	magnésium	4 500
cuivre	12 600	étain	4 000
titane	10 500	béton	2 000
bronze	10 000 à 12 000	bois	1 000 à 3 000
fonte	10 000	caoutchouc	0,75
laiton	9 200	élastomère	0,3

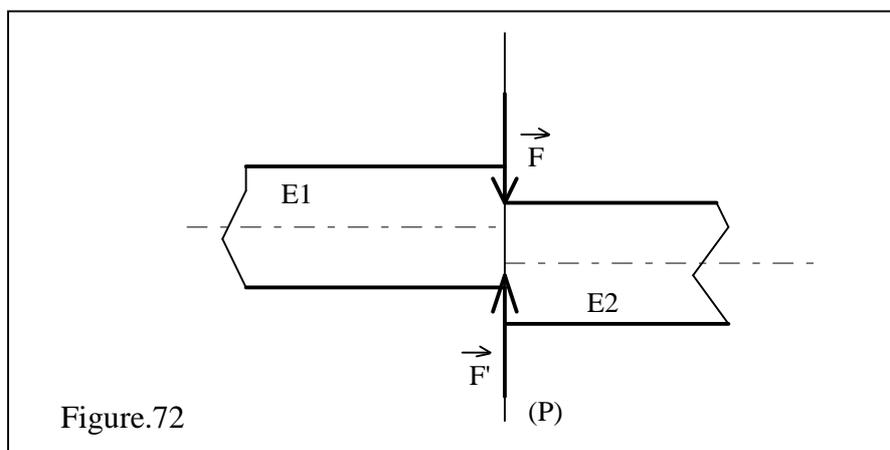
9. CISAILLEMENT

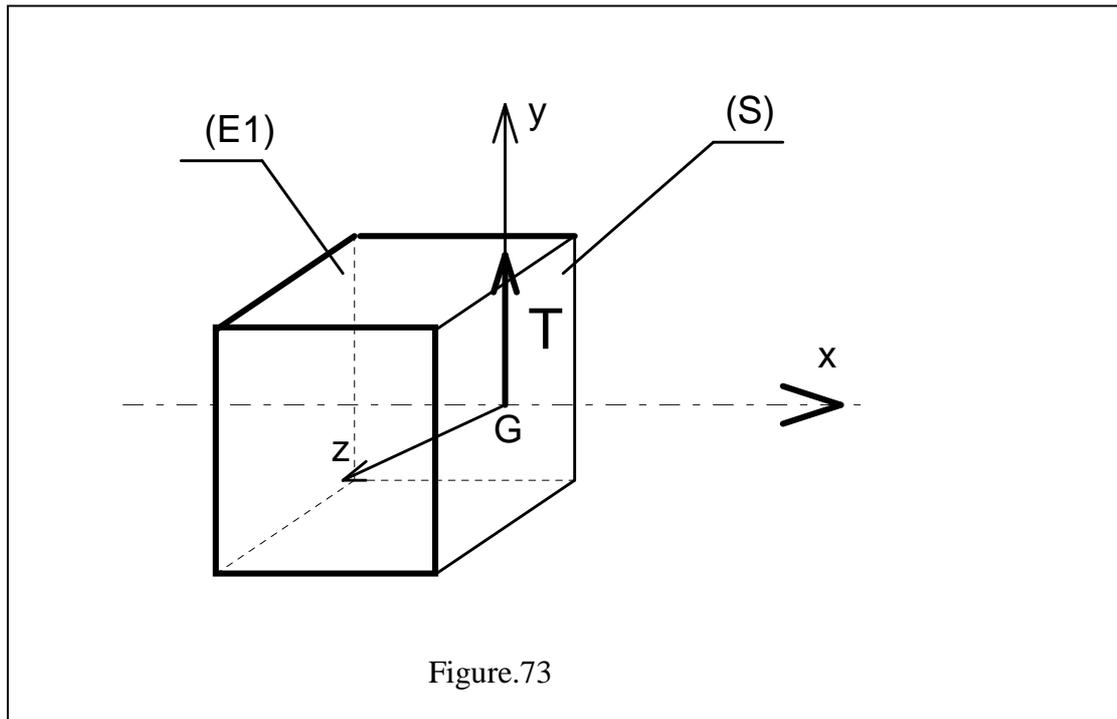
9.1. Définition

Une poutre subit une sollicitation de cisaillement simple lorsqu'elle est soumise à deux systèmes d'action de liaison qui se réduisent dans un plan (P) perpendiculaire à la ligne moyenne à deux forces directement opposées. Figure.71



Sous l'action de ces deux forces la poutre tend à se séparer en deux tronçons E1 et E2 glissant l'un par rapport à l'autre dans le plan de section droite (P). figure.72 et figure.73



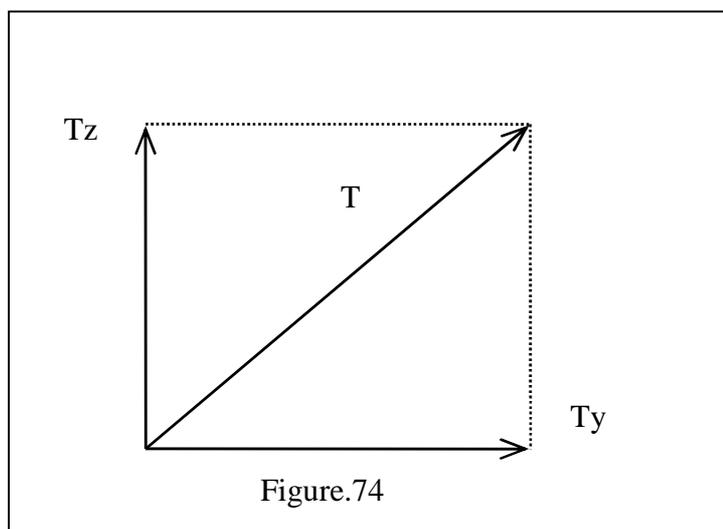


Les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion s'expriment par :

$$\{Cohésion\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Ty & 0 \\ Tz & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

remarques :

* on peut toujours remplacer les composantes d'effort tranchant (T_y et T_z) par une unique composante T en réalisant un changement de repère figure.74.

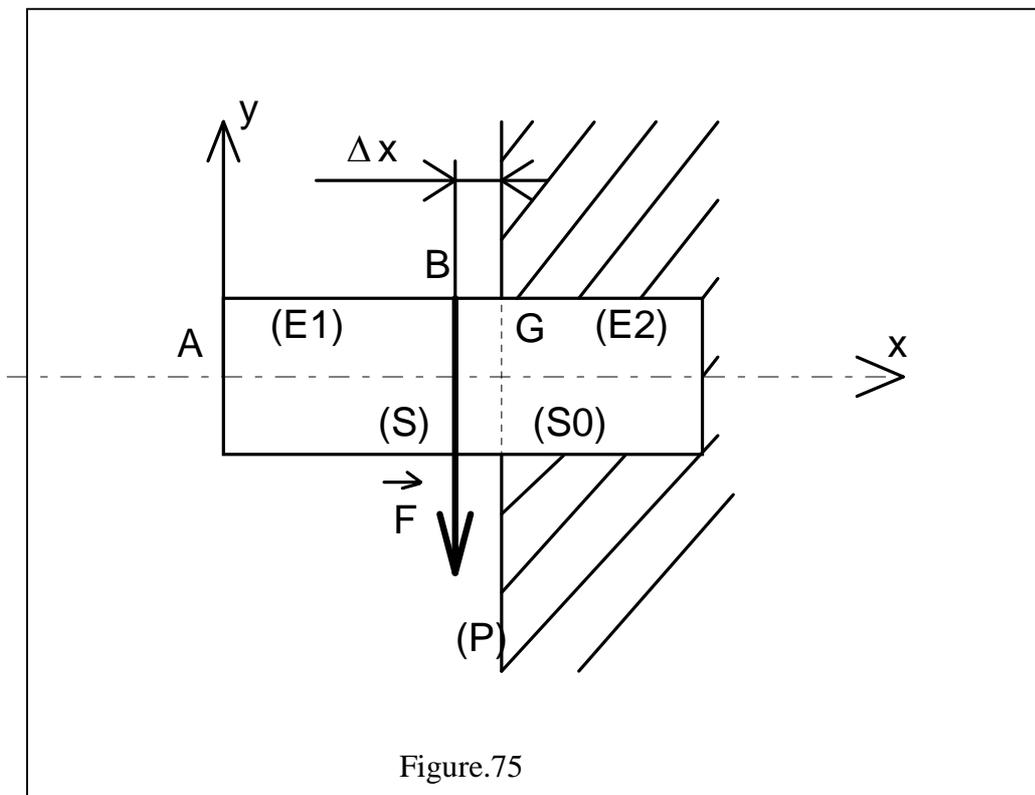


* le cisaillement pur n'existe pas, il subsiste toujours de la flexion...

9.2 Essai de cisaillement

Il est physiquement impossible de réaliser du cisaillement pur au sens de la définition précédente. Les essais et résultats qui suivent permettent toutefois de rendre compte des actions tangentielles dans une section droite et serviront ainsi dans le calcul de pièces soumises au cisaillement. On se gardera cependant le droit d'adopter des coefficients de sécurité majorés pour tenir compte de l'imperfection de la modélisation.

Considérons une poutre (E) parfaitement encastree et appliquons-lui un effort de cisaillement \bar{F} uniformément réparti dans le plan (P) de la section droite (S) distante de Δx du plan (S₀) d'encastrement (voir fig.). On se rapproche des conditions du cisaillement réel, à condition de vérifier que $\Delta x \ll$. Figure. 75

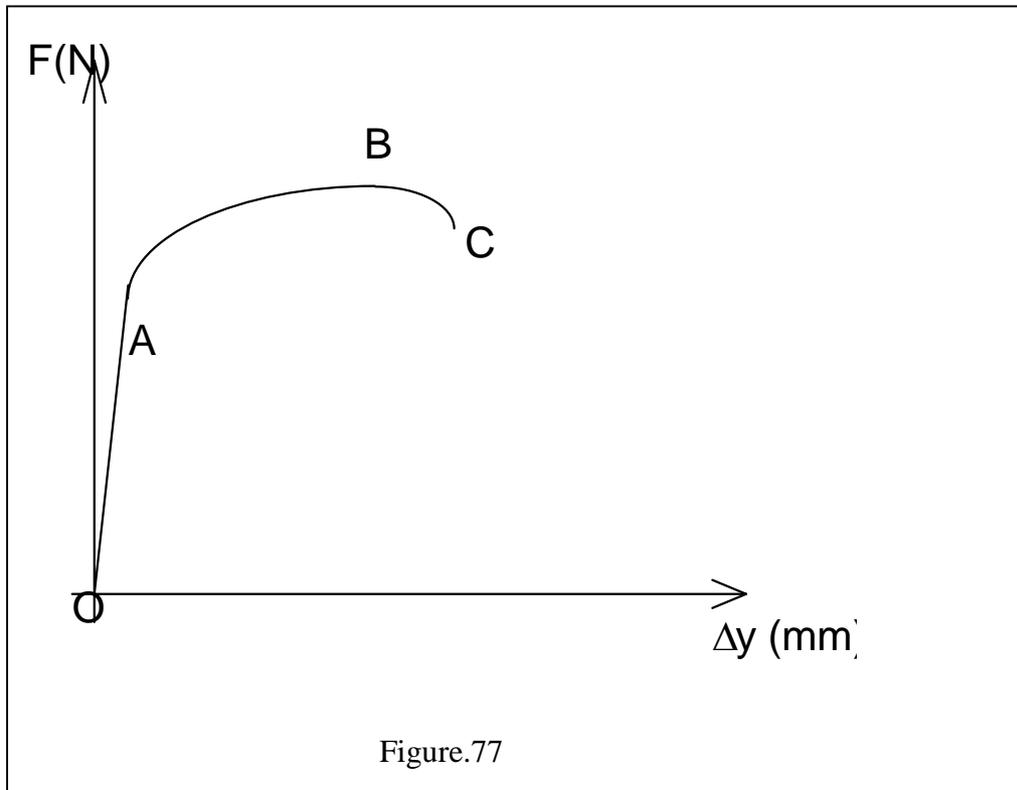
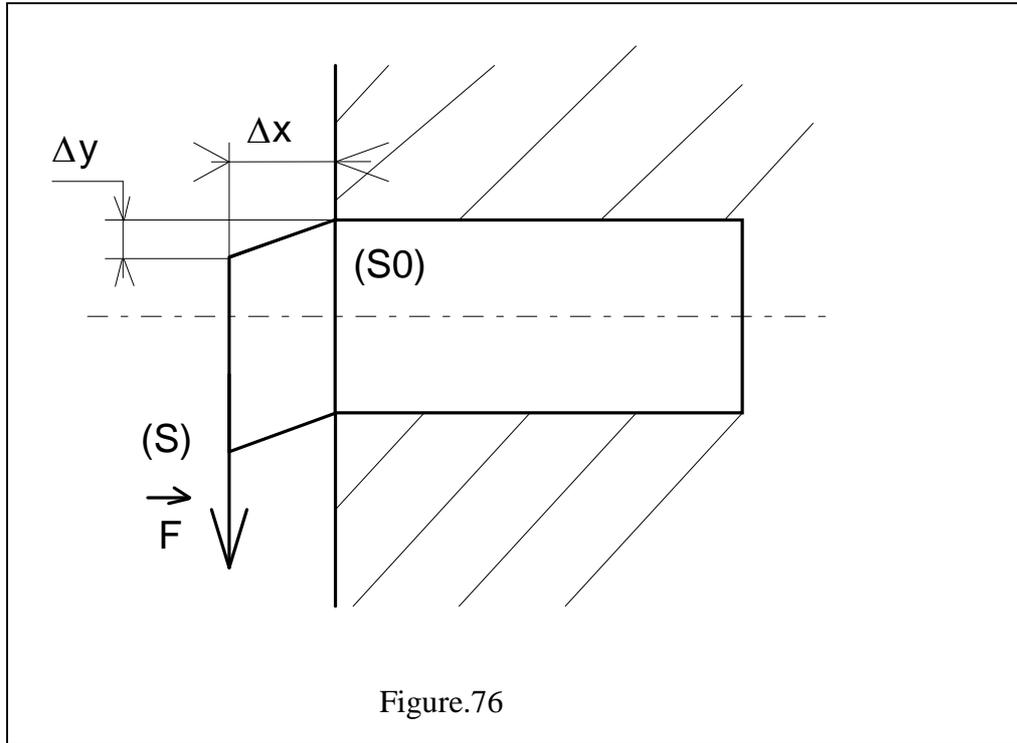


Si l'on isole (E1), on trouve alors le torseur de cohésion suivant :

$$\{Cohésion\}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & F \cdot \Delta x \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

Lorsque Δx tend vers 0, on retrouve alors le torseur de cohésion du cisaillement pur.

Analyse de la courbe obtenue figure.76 et figure. 77



◇ **Zone OA** : c'est la zone des déformations élastiques. Si l'on réduit la valeur de F jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette retrouve sa forme initiale.

◇ **Zone ABC** : c'est la zone des déformations permanentes. Si l'on réduit la valeur de F jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette ne retrouve pas sa forme initiale. (déformations plastiques).

9.3. Déformations élastiques

L'essai précédent a permis pour différents matériaux d'établir la relation :

$$\frac{F}{S} = G \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Unités : F en Newton

S en mm²

G en MPa

Δy et Δx en mm.

G est une caractéristique appelée **module d'élasticité transversal** ou **module de Coulomb**.

Matériau	Fontes	Aciers	Laiton	Duralumin	Plexiglas
G (MPa)	40000	80000	34000	32000	11000

9.4. Contraintes

On définit la contrainte τ dans une section droite (S) par la relation :

$$\tau = \frac{T}{S}$$

Avec : τ : contrainte tangentielle de cisaillement en MPa (valeur moyenne).

T : effort tranchant en Newton.

S : aire de la section droite (S) en mm².

9.5. Relation entre contrainte et déformation

Nous avons déjà vu que $\tau = \frac{T}{S}$, que $\frac{F}{S} = G \frac{\Delta y}{\Delta x}$ et nous savons que $F=T$.

On en déduit que :

$$\tau = G \frac{\Delta y}{\Delta x} = G \cdot \gamma$$

$\gamma = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ est appelé glissement relatif.

9.6. Caractéristiques mécaniques d'un matériau

◇ **Contrainte tangentielle limite élastique τ_e**

C'est la valeur limite de la contrainte dans le domaine élastique. Pour l'acier, cette valeur est comprise entre 250 MPa et 600 MPa.

◇ **Contrainte tangentielle de rupture τ_r**

C'est la valeur limite de la contrainte avant rupture de l'éprouvette.

9.7. Condition de résistance

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale τ doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte pratique de cisaillement τ_p .

On a :

$$\tau_p = \frac{\tau_e}{S}$$

S est un coefficient de sécurité qui varie de 1,1 à 10 selon les domaines d'application.

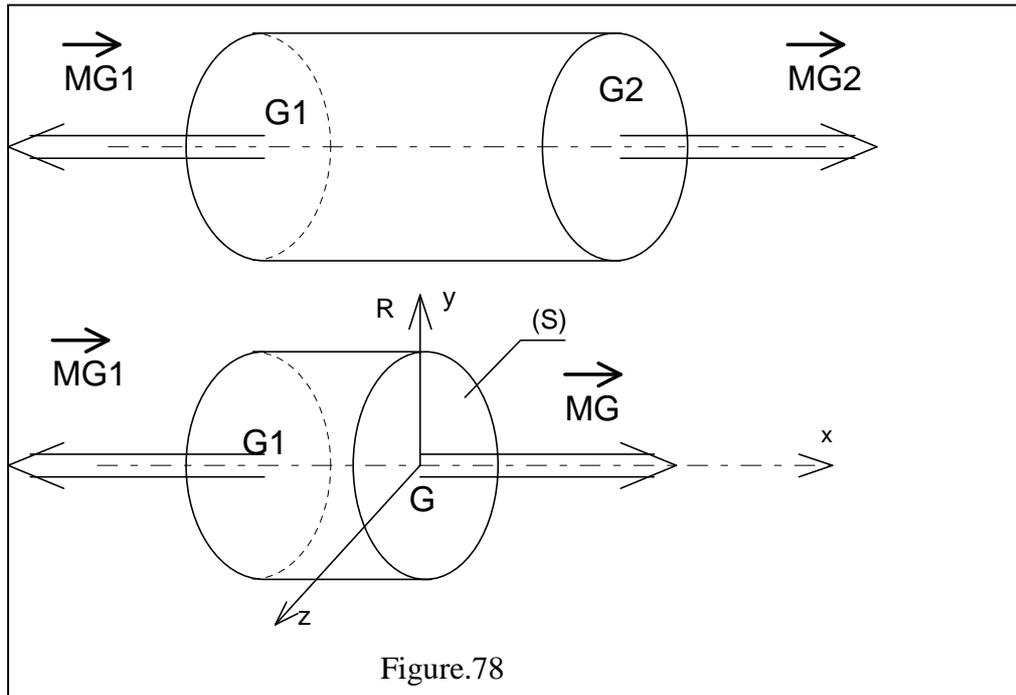
La condition de résistance traduit simplement le fait que la contrainte réelle ne doit pas dépasser le seuil précédent, soit :

$$\tau_{réelle} = \frac{T}{S} < \tau_p$$

10. TORSION

10.1 Définition

Une poutre est sollicitée en torsion simple lorsqu'elle est soumise à ses deux extrémités à des liaisons dont les torseurs associés se réduisent à deux torseurs couples opposés dont les moments sont parallèles à l'axe du cylindre. (on suppose la poutre comme cylindrique et de section circulaire constante) figure.78



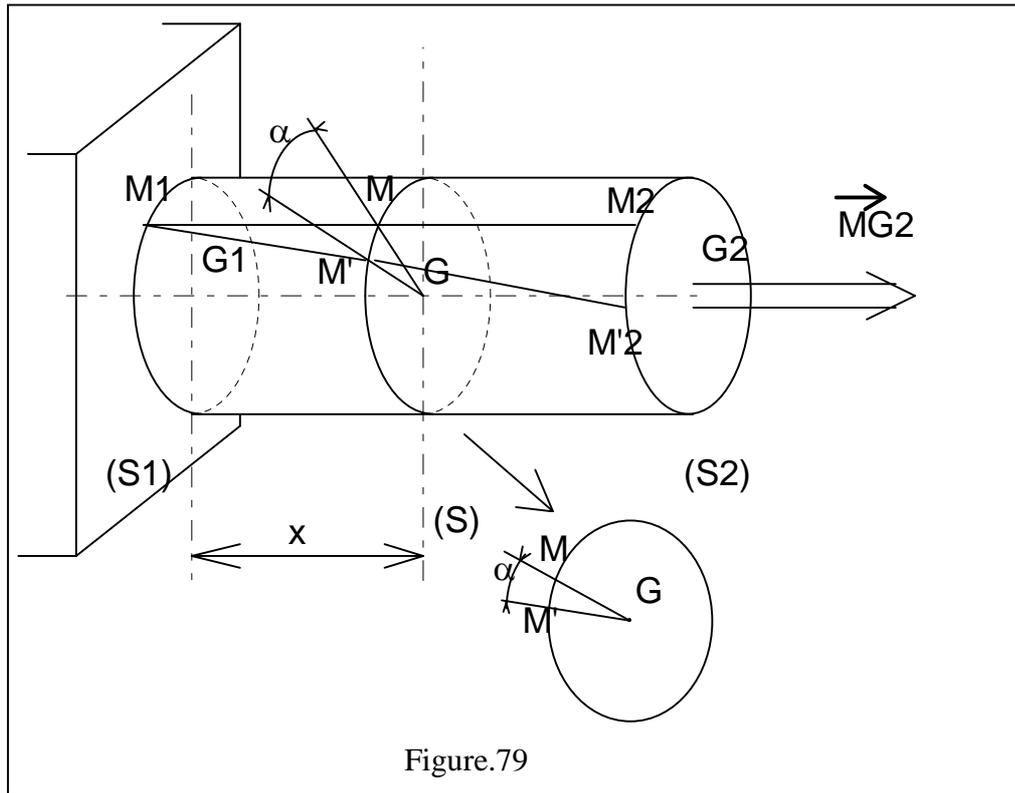
Les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion s'expriment par :

$$\{ Cohésion \}_G = \begin{Bmatrix} 0 & Mt \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

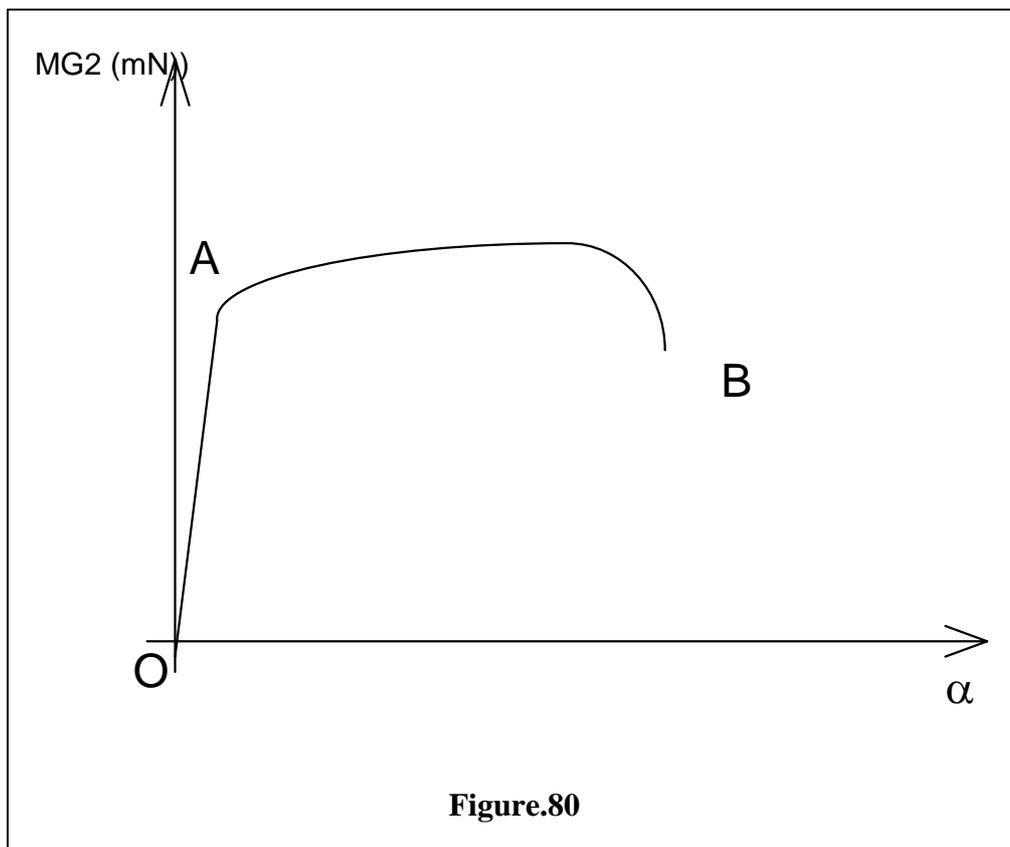
10.2 Essai de torsion

Un dispositif permet d'effectuer un essai de torsion sur une poutre encastree à son extrémité G_1 et soumise à un torseur couple à son extrémité G_2 .

Cette machine permet de tracer le graphe du moment appliqué en G_2 en fonction de l'angle de rotation d'une section droite. Figure.79



On note lors de l'essai que, pour une même valeur du moment, l'angle α croit de façon linéaire avec x , l'abscisse de la section droite étudiée : $\alpha = k.x$ figure.80



Analyse de la courbe obtenue

◇ **Zone OA :**

C'est la zone des déformations élastiques. Si l'on réduit la valeur du moment jusqu'à une valeur nulle, l'éprouvette retrouve sa forme initiale. Dans cette zone, l'angle α de torsion est proportionnel au couple appliqué. Les sections droites et planes de l'éprouvette restent droites et planes pendant l'essai.

◇ **Zone AB :**

C'est la zone des déformations permanentes. L'éprouvette ne retrouve pas sa forme initiale après déformation.

10.3 .Déformations élastiques

La propriété constatée ci-dessus a permis d'établir la relation : $\alpha = \frac{M_t \cdot x}{G \cdot I_0}$

- Unités :
- M_t moment de torsion en N.mm
 - G module d'élasticité transversal en MPa
 - α en radian
 - I_0 moment quadratique polaire de la section (S) en mm⁴

En définissant l'angle unitaire de torsion par : $\theta = \alpha / x$ (exprimé en rad/mm), notre relation devient alors :

$$M_t = G \cdot \theta \cdot I_0$$

10.4. Contraintes figure.81

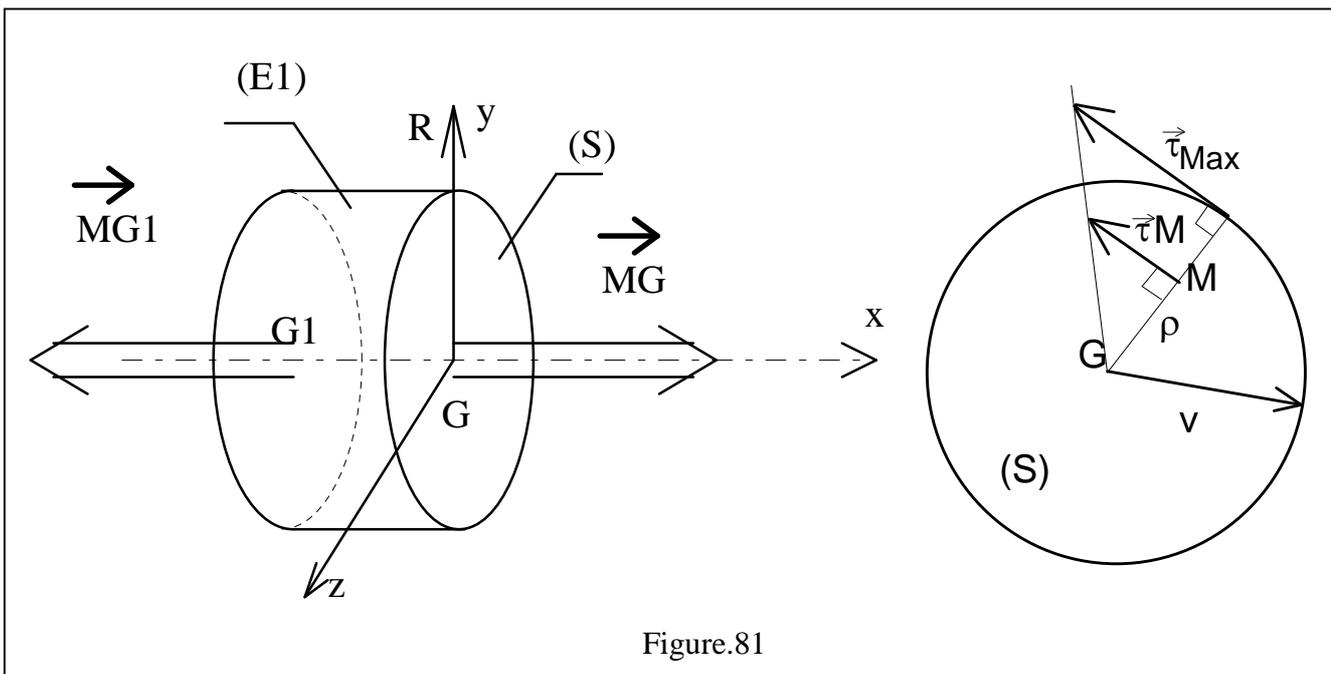


Figure.81

Soit M un point de la section droite (S) de la poutre situé à une distance ρ du centre G de la section (voir ci-dessus). On définit la contrainte de torsion τ en M par la relation :

$$\tau_M = \frac{Mt}{\left(\frac{I_o}{\rho}\right)}$$

avec : τ contrainte tangentielle en MPa.

Mt moment de torsion en N.mm

I_o moment quadratique polaire de la section (S) en mm^4

Contrairement aux phénomènes étudiés jusqu'à maintenant, la contrainte varie en fonction du point choisi dans une section droite. Plus ce point est éloigné du centre de la section, plus la contrainte y sera importante.

La contrainte est maximale pour $\rho = \rho_{\text{maxi}}$, soit : $\tau_M = \frac{Mt}{\left(\frac{I_o}{\rho_{\text{maxi}}}\right)}$

10.5. Conditions de résistance

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale τ doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte pratique τ_p (voisine de la contrainte pratique de cisaillement).

On a :

$$\tau_p = \frac{\tau_e}{S}$$

s est un coefficient de sécurité.

La condition de résistance traduit simplement le fait que la contrainte réelle ne doit pas dépasser le seuil précédent, soit :

$$\tau_{réelle} = \frac{Mt}{\left(\frac{I_o}{\rho_{max i}} \right)} < \tau_p$$

10.7. Influence des variations de section

Si le solide étudié présente de fortes variations de sections, les relations précédentes ne s'appliquent plus. Il faut alors appliquer un coefficient de concentration de contraintes

exemple : épaulement figure.82

r/D	D/d	0,1	0,05	0,02
1,09		1,3	1,5	1,7
1,2		1,5	1,7	2,5
1,5		1,7	2,2	2,7

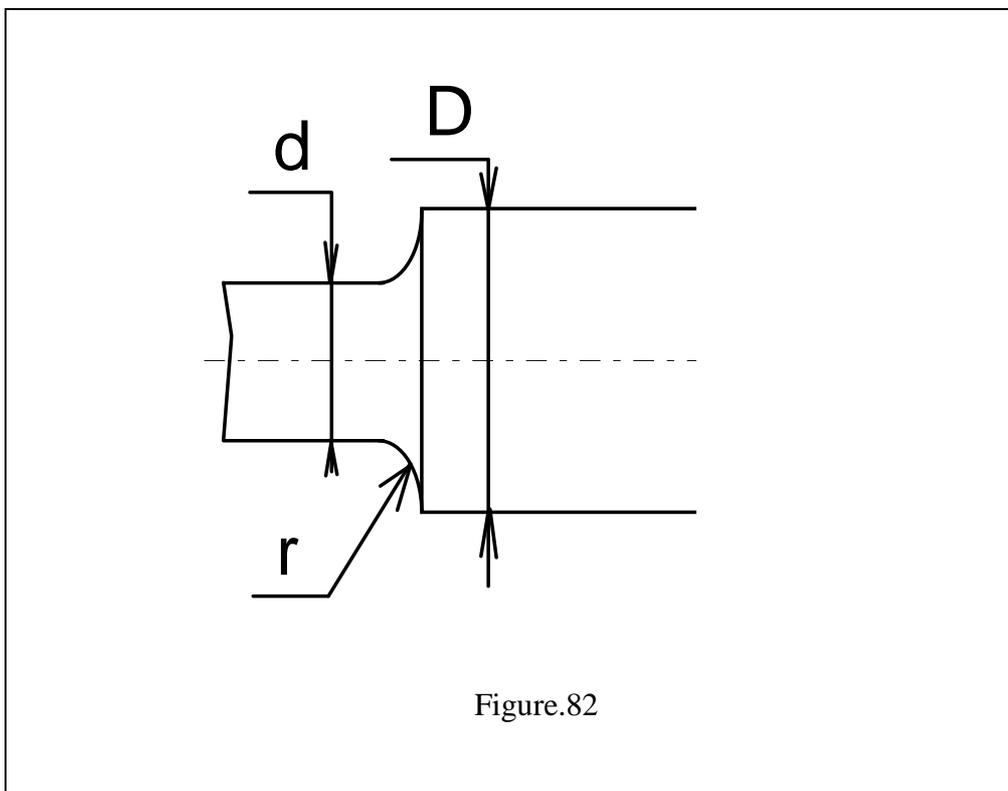


Figure.82

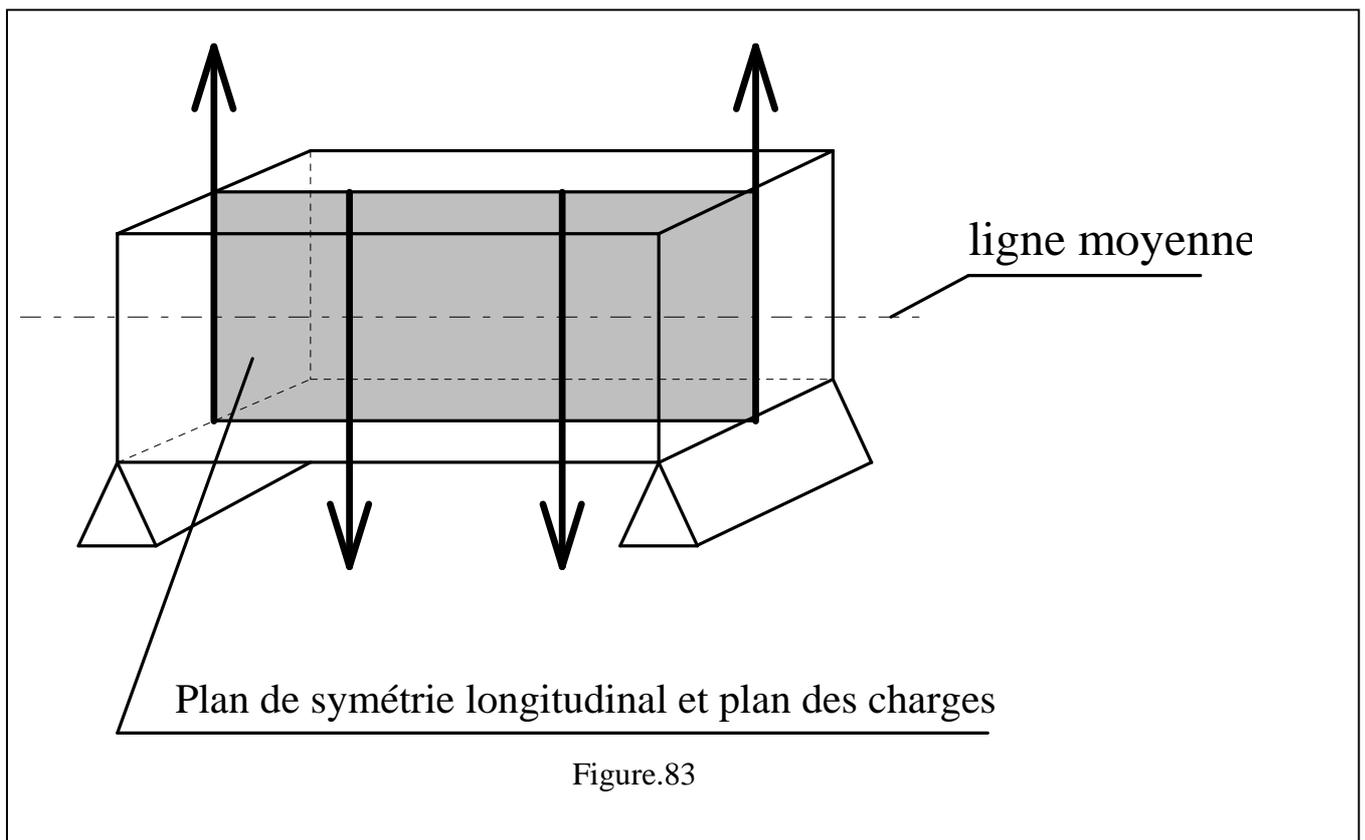
11.FLEXION

Il existe plusieurs types de flexions (pure, plane, déviée). Nous limiterons notre étude au cas de la flexion plane simple.

11.1 Hypothèses

En plus des hypothèses déjà énoncées au début du cours de RDM, la flexion plane simple nous amène à supposer que :

- la ligne moyenne de la poutre est rectiligne.
- la section droite de la poutre est rectiligne.
- la poutre admet un plan de symétrie longitudinal (voir fig. 83).
- toutes les forces appliquées à la poutre sont disposées perpendiculairement à la ligne moyenne et dans le plan de symétrie longitudinal (ou symétriquement par rapport à celui-ci). Les forces appliquées sont soit concentrées en un point, soit réparties suivant une loi déterminée.



11.2. Définition

Une poutre est sollicitée en flexion plane simple lorsque le système des forces extérieures se réduit à un système coplanaire et que toutes les forces sont perpendiculaires à la fibre moyenne (voir ci-dessous figure.84).

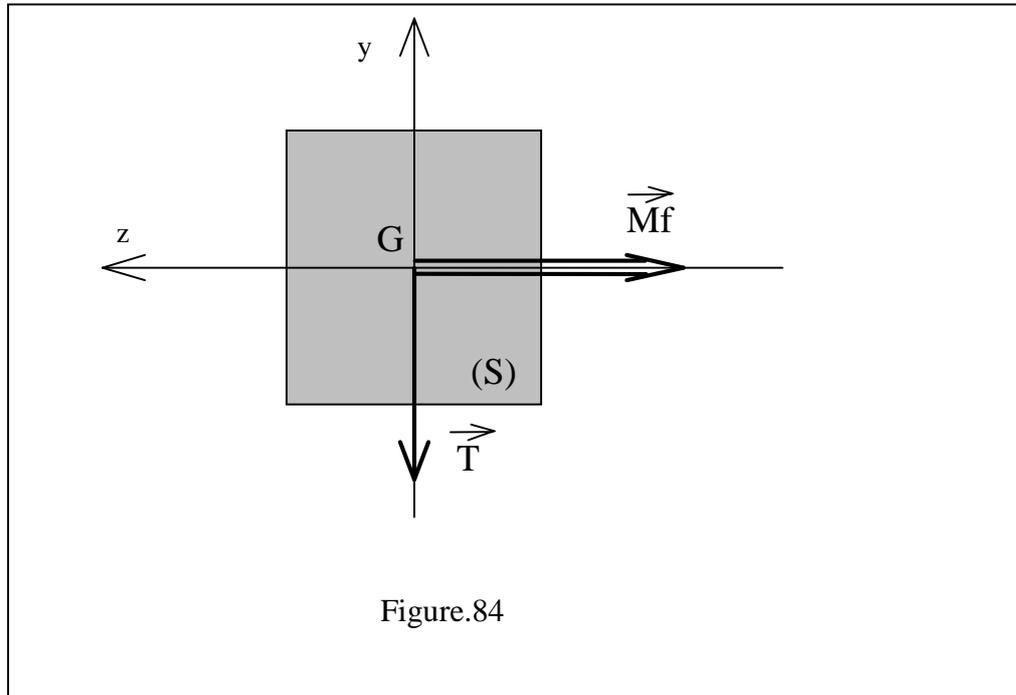


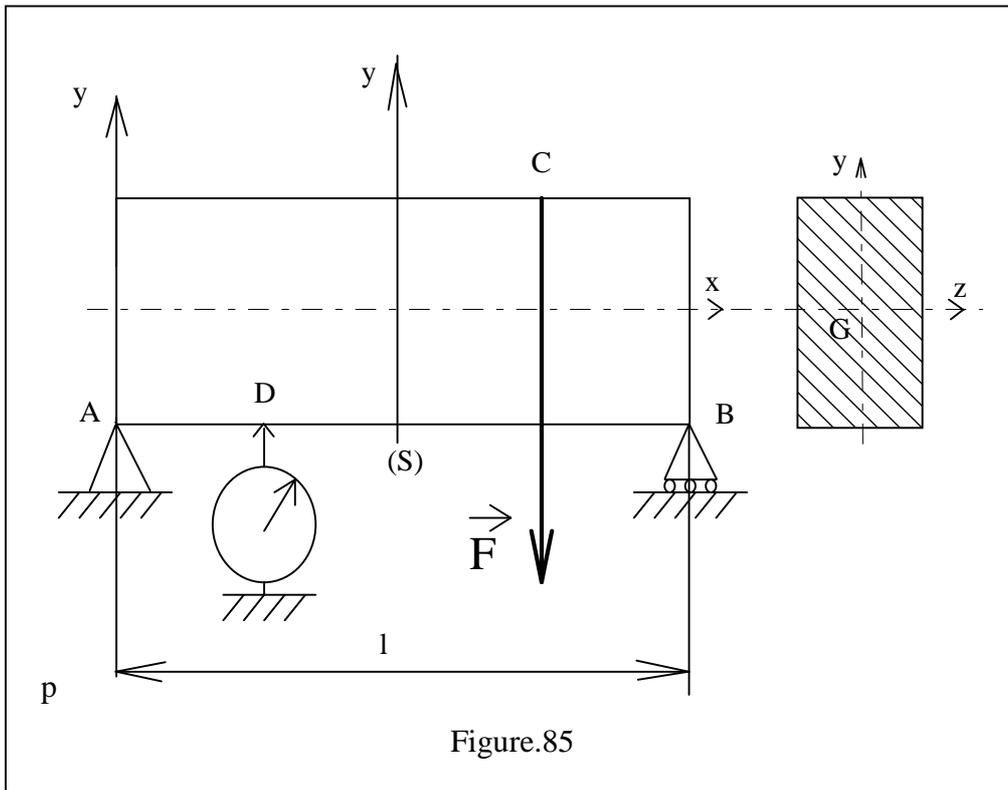
Figure.84

Les éléments de réduction en G du torseur des efforts de cohésion s'expriment par :

$$\{ Cohésion \}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Ty & 0 \\ 0 & Mfz \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

11.3. Essai de flexion (domaine élastique)

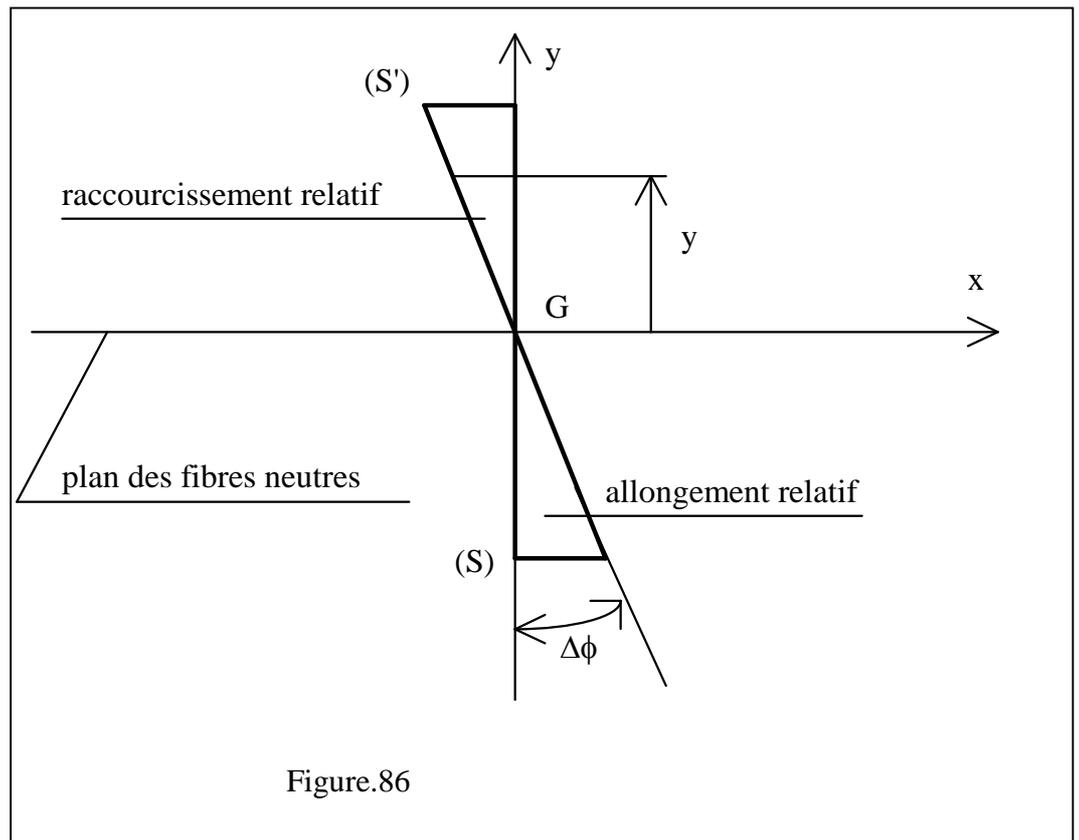
Un dispositif représenté ci-dessous permet d'effectuer un essai de flexion plane simple sur une poutre reposant sur deux appuis A et B et soumise en C à une force \vec{F} figure.85.



Un comparateur placé en D permet de mesurer la flèche lorsque F varie.

Constatations :

- La flèche est proportionnelle à l'effort F appliqué et ceci quelque soit le point D choisi.
- Pour une même valeur de F, la flèche est maximum lorsque D est au milieu de la poutre.
- On observe, en effectuant l'essai avec différentes poutres, que la flèche en D est inversement proportionnelle au moment quadratique I_{Gz} de la section.
- Les fibres longitudinales situées au dessus de la ligne moyenne se raccourcissent et celles situées en dessous de la ligne moyenne s'allongent. Figure.86
- Les fibres appartenant au plan (G,x,z) ne changent pas de longueur.
- Les allongements et raccourcissement relatifs ($\Delta l/l$) sont proportionnels à la distance de la fibre considérée au plan (G,x,z).
- Les sections planes normales aux fibres restent planes et normales aux fibres après déformation.



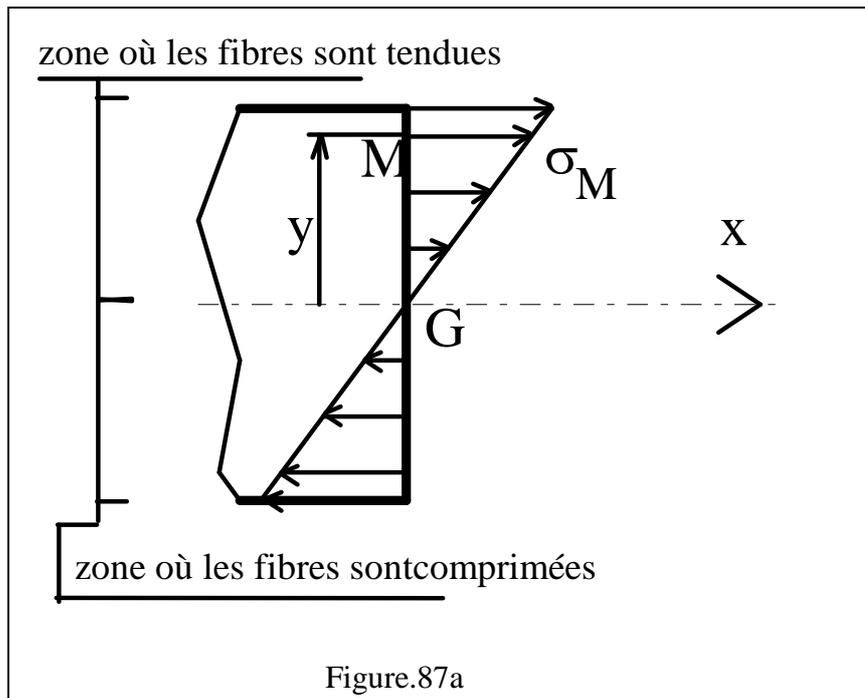
11.4. Contraintes

Dans le cas de la flexion plane simple, les contraintes se réduisent essentiellement à des contraintes normales σ .

Les contraintes de cisaillement τ sont négligeables.

La contrainte normale s en un point M d'une section droite (s) est proportionnelle à la distance y entre ce point et le plan moyen passant par G. figure.87a

$$\sigma = \frac{Mf}{Iz} \cdot y$$



11.5. Conditions de résistance

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale σ doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte pratique à l'extension σ_{pe} .

On a :

$$\sigma_{pe} = \frac{\sigma_e}{s}$$

s est un coefficient de sécurité

La condition de résistance traduit simplement le fait que la contrainte réelle ne doit pas dépasser le seuil précédent, soit :

$$\sigma_{réelle} = \frac{Mf_{maxi}}{\left(\frac{I_{Gz}}{y_{maxi}} \right)} < \sigma_{pe}$$

11.6. Influence des variations de section

Si le solide étudié présente de fortes variations de sections, les relations précédentes ne s'appliquent plus. Il faut alors appliquer un coefficient de concentration de contraintes.

11.7. Etude de la déformée

Cette étude permet de donner l'équation de la déformée de la poutre sous la forme $y = f(x)$. Elle est principalement basé sur la résolution de l'équation différentielle suivante :

$$Mf = E.I. y''$$

Il faut alors procéder à deux intégrations successives. Les constantes d'intégration s'obtiennent grâce aux conditions aux limites (appuis, encastements...).

exemple de conditions aux limites :

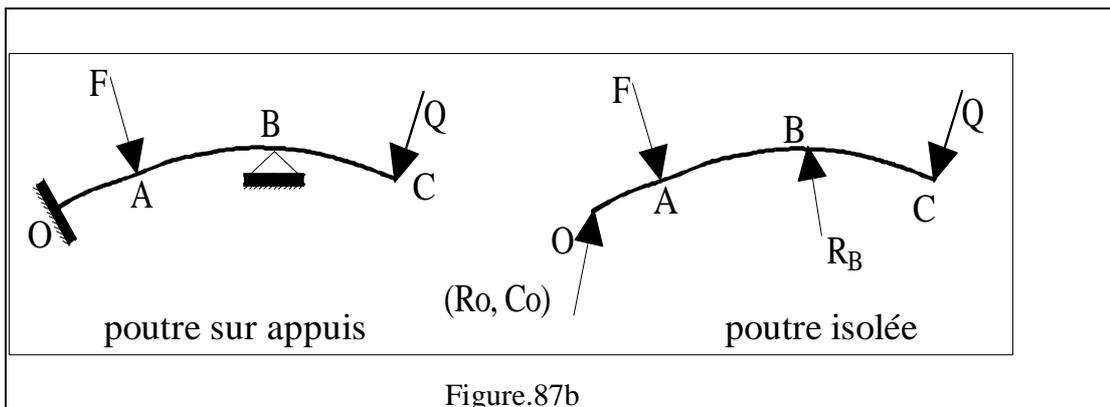
Appui simple	$y = 0$	
Encastement	$y = 0$	$y' = 0$

11.5. Les efforts dans les poutres :

Efforts extérieurs :

Définition

On appelle **efforts extérieurs** les efforts s'exerçant sur la poutre isolée. On en distingue deux sortes : les **charges** qui sont des efforts auxquelles la poutre est destinée à résister et les **actions de liaison** qui sont des efforts appliqués sur la poutre par les liaisons qui la maintiennent en place figure.87b

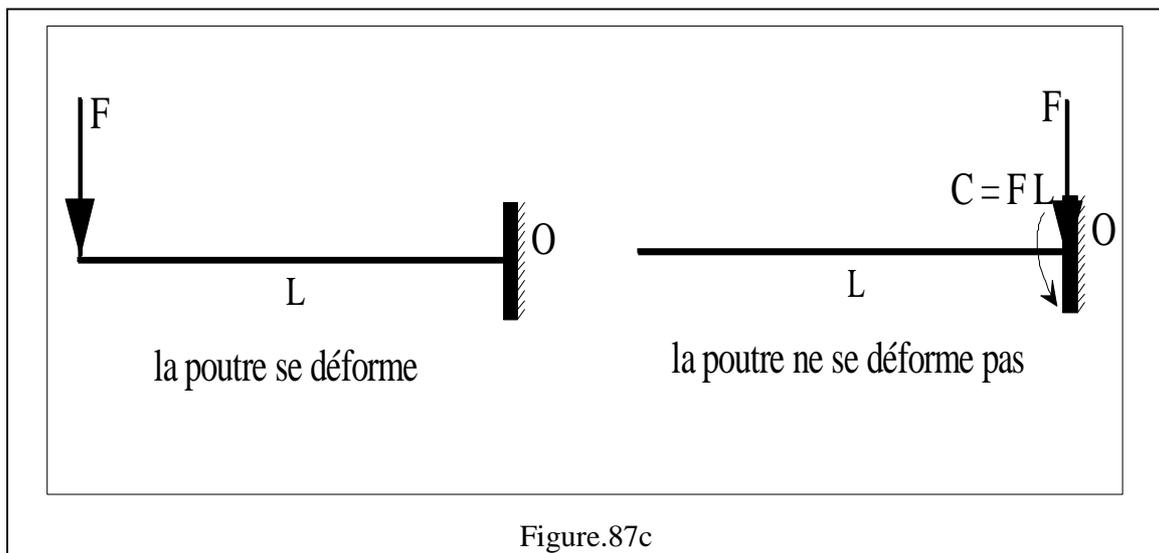


Dans l'exemple ci-dessus, F et Q sont des charges. (R_O, C_O) et R_B sont des actions de liaison. En général, les actions de liaison sont les inconnues du problème.

Les charges :

En théorie des poutres, on distingue en général deux types de charges : les **charges concentrées** qui s'appliquent en un point de la poutre, et les **charges réparties** qui sont distribuées continûment le long d'un segment de la poutre.

En mécanique générale, les efforts sont mathématiquement représentés par des torseurs. En mécanique des milieux déformables on introduit une notion supplémentaire importante : le point d'application de l'effort. Dans l'exemple ci-dessous, les deux torseurs d'efforts extérieurs sont équivalents mais la déformation n'est pas la même. figure.87c



Important

Désormais, les éléments de réduction des torseurs de charge seront définis en leurs points d'application.

Définitions

Une **charge concentrée** en un point d'application est définie par un torseur en ce point d'application. Si ce torseur se réduit à une résultante, on l'appelle **force concentrée**. Si ce torseur se réduit à un couple (ou un moment) on l'appelle **moment concentré**. Les charges réparties sont des densités linéiques de torseurs. Les **forces réparties** sont des densités linéiques de forces. Les **moments répartis** sont des densités linéiques de moment (d'emploi très rare dans la pratique).

Les actions de liaison :

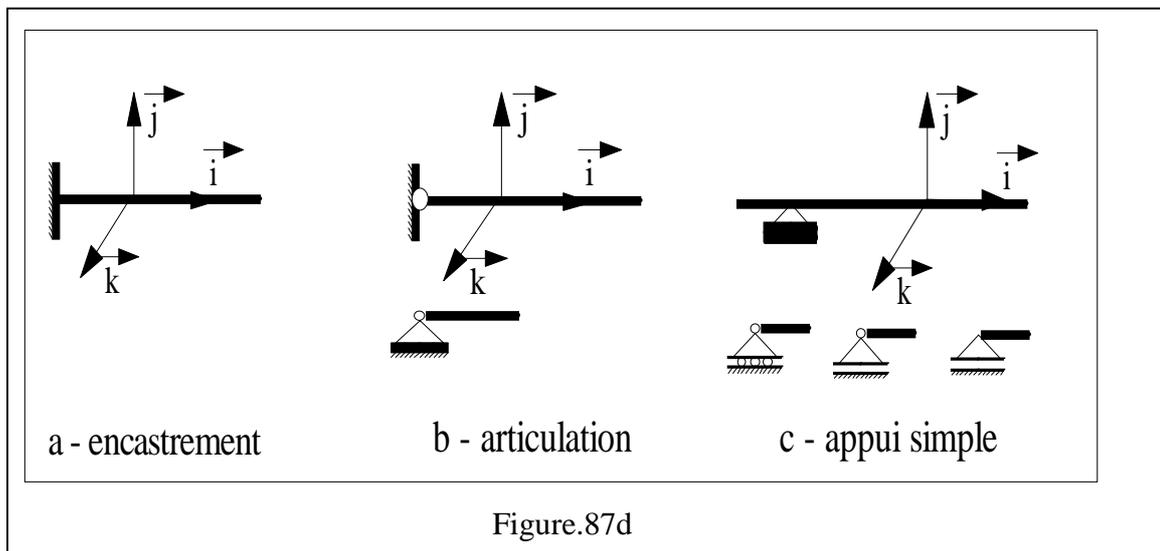
Les poutres étant réduites à des lignes matérielles, le contact avec l'extérieur est schématisé ponctuel. Une action de liaison (ponctuelle) est définie par un torseur (de contact) qui représente l'action mécanique de la liaison (support ou appui) sur la poutre. Le torseur d'action de liaison dépend du type de liaison envisagé (comportement de la liaison). Les éléments de réduction d'un torseur d'actions de liaison sont définis au point de liaison.

Nous nous limiterons dans ce cours aux liaisons parfaites (le travail des actions de liaison est nul). Il existe trois types de liaisons parfaites :

Encastrement : Les rotations et les déplacements sont bloqués.

Articulation : (ou **liaison rotule**) La rotation est totalement libre. Les déplacements sont bloqués.

Appui simple : La rotation et le déplacement horizontal sont libres. Le déplacement vertical est bloqué. figure.87d



Equilibre d'une poutre :

Soit une poutre soumise aux actions extérieures suivantes :

\vec{F}_i les charges concentrées aux points A_i

\vec{C}_i les moments concentrés aux points A_i

$\vec{p}(x_i)$ les forces réparties

\vec{F}_k les résultantes de liaison aux points B_k

\vec{C}_k les moments de liaison aux points B_k

D'après le principe de la statique, la poutre est en équilibre si le torseur résultant des efforts extérieurs est nul. Ceci s'écrit mathématiquement :

$$\sum_i \vec{F}_i + \sum_k \vec{F}_k + \int \vec{p} \, dx = 0$$

$$\sum_i \vec{OA}_i \wedge \vec{F}_i + \sum_i \vec{C}_i + \sum_k \vec{OA}_k \wedge \vec{F}_k + \sum_k \vec{C}_k + \int \vec{OG} \wedge \vec{p} \, dx$$

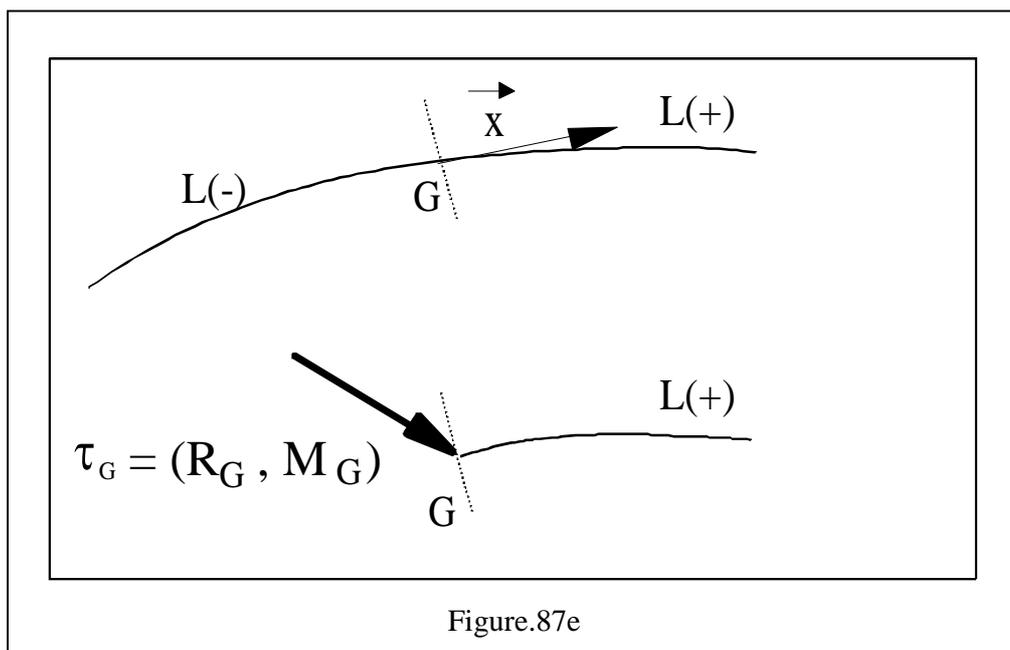
Ces deux équations vectorielles fournissent 6 équations scalaires (3 dans le plan : 2 équations de forces et une équation de moments).

Efforts intérieurs :

Torseur des efforts intérieurs.

Considérons une poutre en équilibre sous l'action de ses efforts extérieurs (charges et actions de liaison).

Figure.87e



On choisit une **orientation** arbitraire de la ligne moyenne (choix du vecteur tangent \vec{x}) et on imagine une **coupure** en un point G qui divise la poutre en deux parties notées L(+) et L(-). Chacune de ces deux parties est en équilibre sous l'action des efforts extérieurs qu'elle reçoit et sous l'action en G de l'autre partie.

Définition

On appelle torseur des efforts intérieurs au point G le torseur τ_G des actions de la partie $L(-)$ sur la partie $L(+)$.

Important

La notion de torseur des efforts intérieurs n'a de sens que si on a défini une orientation de la ligne moyenne. En effet, un changement d'orientation définirait un torseur des efforts intérieurs opposé au précédent.

Calcul du torseur des efforts intérieurs :

Si on note $(T-)$ le torseur équivalent aux efforts extérieurs agissant sur la partie $L(-)$ et $(T+)$ le torseur équivalent aux efforts extérieurs agissant sur la partie $L(+)$, on peut écrire (au même point G) les égalités suivantes :

$$\text{Équilibre global de la poutre :} \quad (\mathbf{T-}) + (\mathbf{T+}) = \mathbf{0}$$

$$\text{Équilibre de la partie } L(+): \quad (\mathbf{T+}) + \tau_G = \mathbf{0}$$

On en déduit deux manières d'évaluer le torseur des efforts intérieurs en G .

$$\tau_G = - (T+) = (T-)$$

Efforts intérieurs :

Définition

Les **efforts intérieurs** en un point G de la ligne moyenne d'une poutre sont les composantes dans le RCPI des éléments de réduction du torseur des efforts intérieurs τ_G . Ces efforts intérieurs ont des noms consacrés :

N est l'effort normal (dans la direction \vec{x})

T_y est l'effort tranchant dans la direction \vec{y}

T_z est l'effort tranchant dans la direction \vec{z}

$\vec{T} = T_y \vec{y} + T_z \vec{z}$ est l'effort tranchant.

M_t est le moment de torsion (dans la direction \vec{x})

M_y est le moment de flexion ou fléchissant dans la direction \vec{y}

M_z est le moment de flexion ou fléchissant dans la direction \vec{z}

$\vec{M} = M_y \vec{y} + M_z \vec{z}$ est le moment de flexion.

Remarque

Le signe de N a un sens physique : $N > 0$ signifie une traction. $N < 0$ signifie une compression. Il est facile de voir que cela est indépendant de l'orientation de la ligne moyenne.

Définition

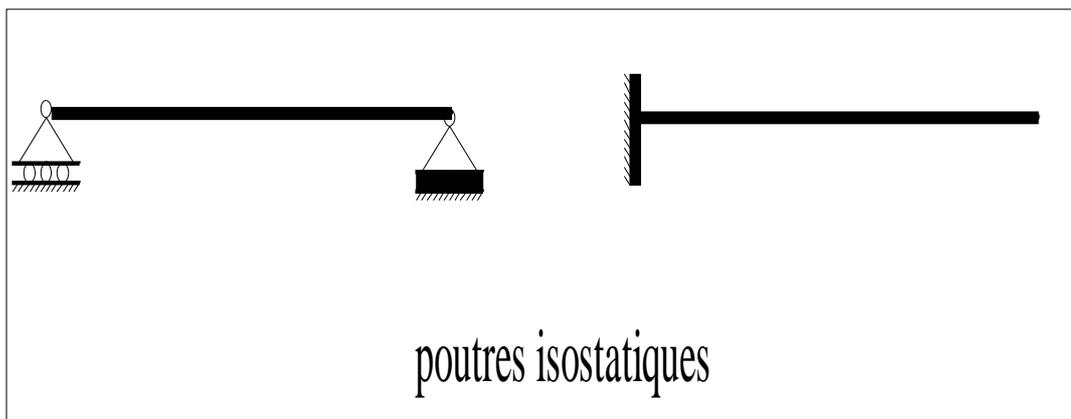
On appelle **diagrammes des efforts intérieurs** les diagrammes représentant la variation de chacun des efforts intérieurs selon la ligne moyenne. Ces représentations sont utiles pour situer rapidement les sections les plus sollicitées.

11.6. Système isostatique, système hyperstatique, mécanisme :

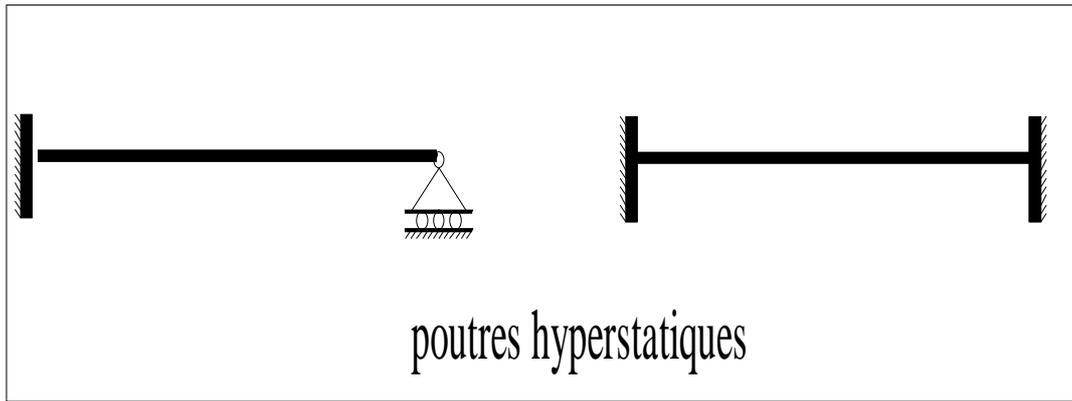
Soit k le nombre d'équations d'équilibre (6 dans l'espace, 3 dans le plan).

Soit r le nombre d'inconnues (résultantes de liaison et moments de liaison).

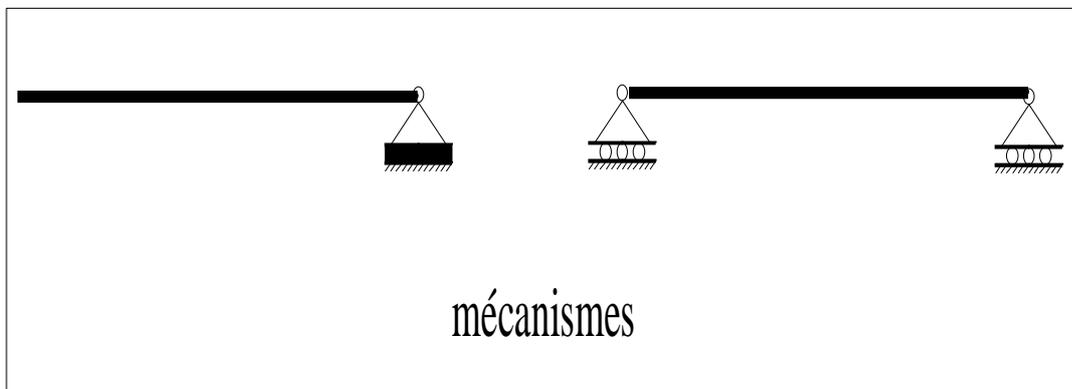
Si $r = k$: Les actions de liaison sont déterminées par les équations de la statique. La structure est dite **isostatique**.



Si $r > k$: Le nombre d'équations d'équilibre est alors insuffisant à la détermination des actions de liaison inconnues. La structure est dite **hyperstatique** de degré $r - k$.



Si $r < k$: l'équilibre est impossible en général. Le système est **hypostatique (mécanisme)**. L'étude des mécanismes déborde du cadre la résistance des matériaux.



12. TORSEUR DE COHESION $G \left\{ T_{coh} \right\}_R$

12.1. DEFINITION ET REPERAGE DE LA COUPURE FICTIVE

Soit (E) le solide assimilé à une poutre et (\bar{E}) l'ensemble extérieur à (E) . $R_0 = (\bar{x}_0, \bar{y}_0, \bar{z}_0)$ est le repère lié à (E) tel que \bar{x}_0 est confondu avec la ligne moyenne. Considérons un plan (P) normal à \bar{x}_0 définissant la section droite (S) de (E) . Soit G le centre de surface de (S) , $\overrightarrow{OG} = x \cdot \bar{x}_0$ définissant la position de la section droite par rapport à R_0 . La coupure fictive par le plan (P) partage la poutre en deux tronçons (E_1) et (E_2) figure.88.

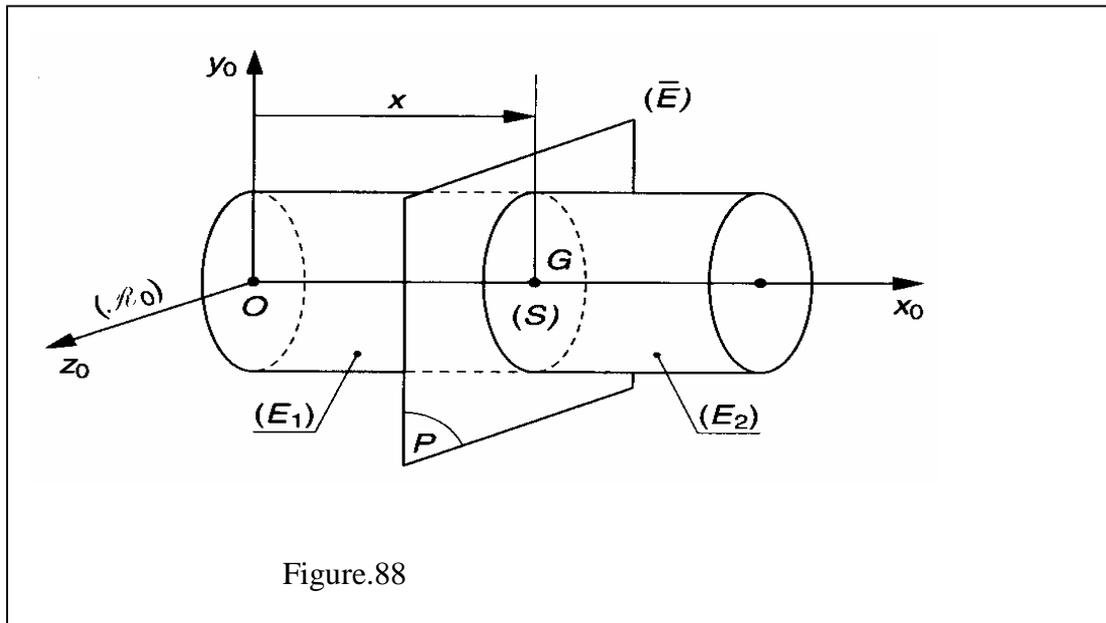


Figure.88

12.2. DEFINITION DU TORSEUR DE COHESION

Le torseur de cohésion $\{T_{coh}\}_{R0}$ est le torseur associé à l'ensemble des actions mécaniques exercées par le tronçon (E_2) sur le tronçon (E_1) de la poutre dont les éléments de réduction sont exprimés au point G centre de la surface (S)

$${}_G\{T_{coh}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\}$$

Remarque :

Ces actions, non visibles, sont internes au matériau et lui permettent de garder son intégrité physique d'où le nom de cohésion.

Le torseur de cohésion est toujours le torseur des actions mécaniques exercées par le tronçon de droite (E_2) sur le tronçon de gauche (E_1)

\vec{R} et \vec{M}_G sont fonctions de l'abscisse x du centre de surface G de (S)

Pour simplifier les écritures, il n'y aura pas d'indices sur les éléments de réduction

12.3. DETERMINATION DES ELEMENTS DE REDUCTION EN G DU TORSEUR DE COHESION

Etude de l'équilibre de la poutre (E) : *figure.89*

Le PFS nous permet d'écrire : $\{T_{E \rightarrow E}\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}_{E \rightarrow E} = \vec{0} \\ \vec{M}_{GE \rightarrow E} = \vec{0} \end{array} \right\} = \{0\}$

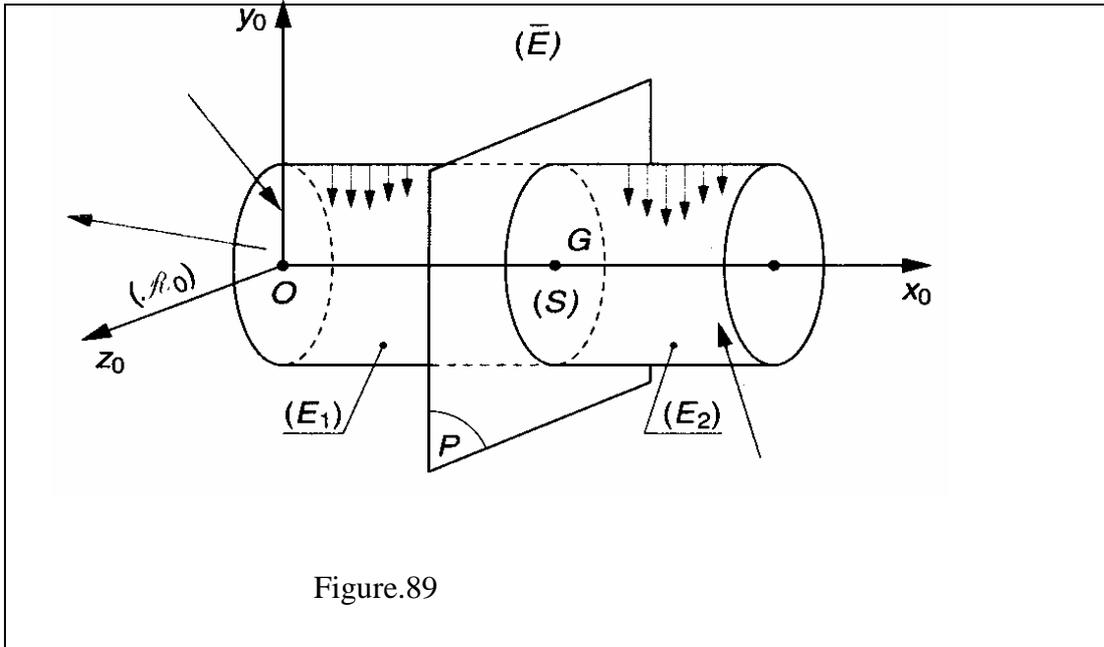


Figure.89

En utilisant la coupure fictive, les actions mécaniques extérieures peuvent être séparées en deux groupes :

- le torseurs des AM extérieures à la poutre appliquées sur (E_1) :

$$\left\{ T_{\bar{E} \rightarrow E_1} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\bar{E} \rightarrow E_1}} \\ \overrightarrow{M_{G\bar{E} \rightarrow E_1}} \end{array} \right\}$$

- le torseurs des AM extérieures à la poutre appliquées sur (E_2) :

$$\left\{ T_{\bar{E} \rightarrow E_2} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\bar{E} \rightarrow E_2}} \\ \overrightarrow{M_{G\bar{E} \rightarrow E_2}} \end{array} \right\}$$

L'équilibre de (E) peut s'écrire :

$$\left\{ T_{\bar{E} \rightarrow E} \right\}_G = \left\{ T_{\bar{E} \rightarrow E_1} \right\}_G + \left\{ T_{\bar{E} \rightarrow E_2} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\bar{E} \rightarrow E_1}} \\ \overrightarrow{M_{G\bar{E} \rightarrow E_1}} \end{array} \right\}_G + \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\bar{E} \rightarrow E_2}} \\ \overrightarrow{M_{G\bar{E} \rightarrow E_2}} \end{array} \right\}_G = \left\{ 0 \right\}$$

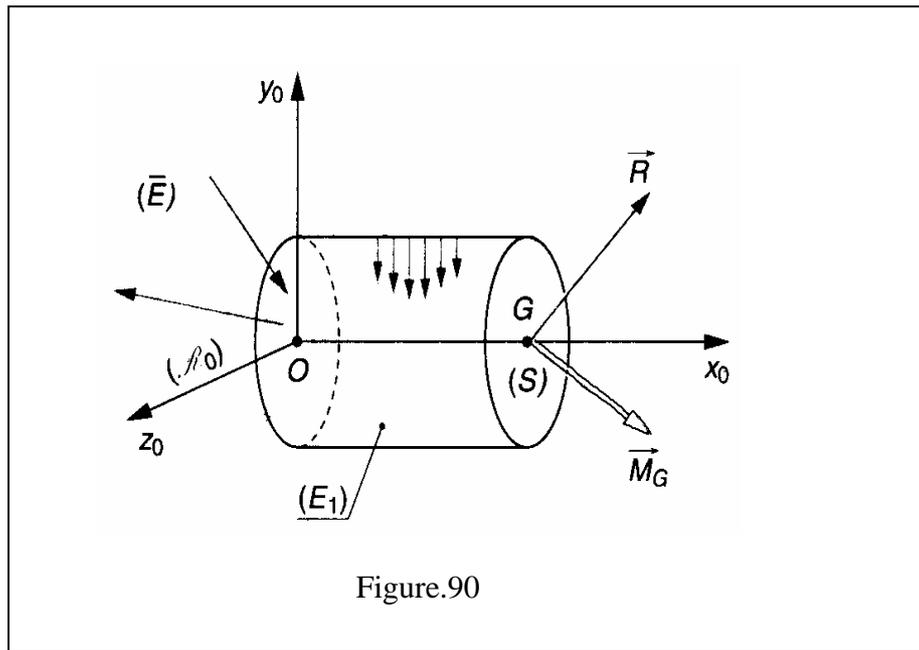
Etude de l'équilibre de (E_1) . Relation entre $\left\{ T_{\bar{E} \rightarrow E} \right\}$ et $\left\{ T_{cohesion} \right\}$

(E_1) est en équilibre sous l'action de deux torseurs :

- action du milieu extérieur : $\{T_{\bar{E} \rightarrow E1}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\bar{E} \rightarrow E1}} \\ \overrightarrow{M_{G\bar{E} \rightarrow E1}} \end{array} \right\}$

- action de $E2 \rightarrow E1$: $\{T_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\}$

PFS appliqué à $(E1)$: $\{T_{\bar{E} \rightarrow E1}\}_G + \{T_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\bar{E} \rightarrow E1}} + \vec{R} = \vec{0} \\ \overrightarrow{M_{G\bar{E} \rightarrow E1}} + \vec{M}_G = \vec{0} \end{array} \right\} = \{0\}$



Les éléments de réduction en G du torseur des actions de cohésion peuvent donc s'exprimer de deux façons :

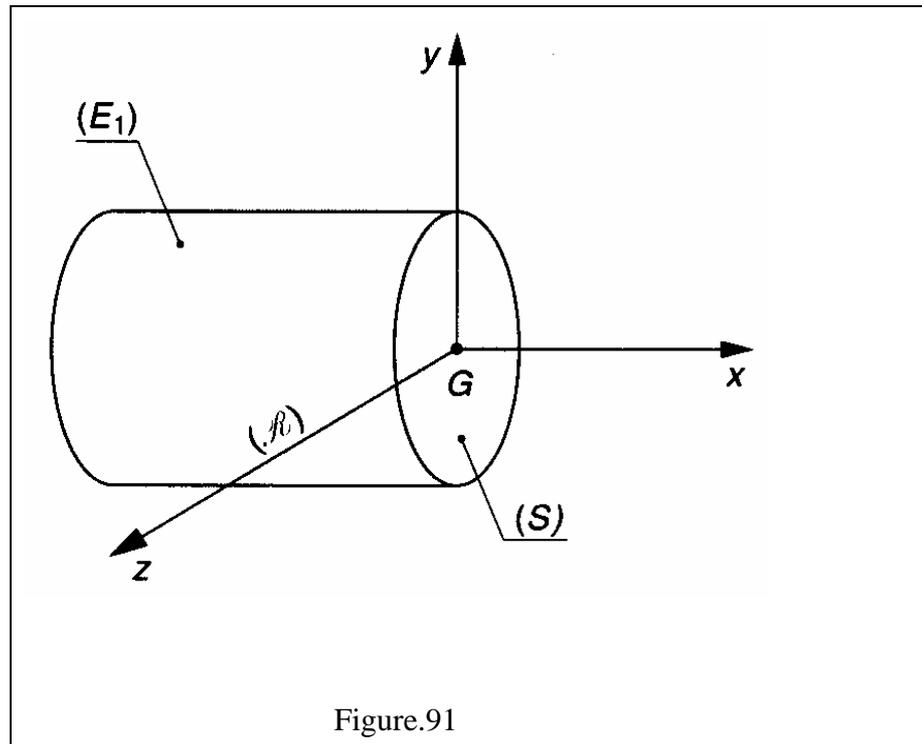
$\{T_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} -\overrightarrow{R_{\bar{E} \rightarrow E1}} \\ -\overrightarrow{M_{G\bar{E} \rightarrow E1}} \end{array} \right\}$	$\{T_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{\bar{E} \rightarrow E2}} \\ \overrightarrow{M_{G\bar{E} \rightarrow E2}} \end{array} \right\}$
--	--

Suivant le cas (simplicité), nous utiliserons l'une ou l'autre des relations

12.4. Repère de définition des sollicitations

Soit $R=(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère local associé à la section droite fictive (S). Ce repère est tel que \vec{x} définit la normale extérieure à (S) relative à $(E1)$. \vec{y} et \vec{z} appartiennent alors au plan (P) de la section (S).

Ce repère sera toujours direct. Figure.91



12.5. Dénomination des composantes des éléments de réduction du torseur des efforts de cohésion

$$\{T_{coh}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \vec{R} = \vec{N} + \vec{T} \\ \vec{M}_G = \vec{M}_t + \vec{M}_f \end{array} \right.$$

- Effort normal \vec{N} : projection de \vec{R} sur l'axe \bar{x}
- Effort tranchant \vec{T} : projection de \vec{R} sur la section droite (\bar{y}, \bar{z})
- Moment de torsion \vec{M}_t : projection de \vec{M}_G sur l'axe \bar{x}
- Moment de flexion \vec{M}_f : projection de \vec{M}_G sur la section droite (\bar{y}, \bar{z})

\vec{T} et \vec{M}_f n'ayant pas de direction privilégiée dans (\bar{y}, \bar{z}) , il est préférable d'utiliser les composantes algébriques de ces vecteurs figure.92

$$\{T_{coh}\}_G = \left\{ \begin{matrix} \bar{R} \\ M_G \end{matrix} \right\}_G = \left\{ \begin{matrix} N & Mt \\ Ty & Mfy \\ Tz & Mfz \end{matrix} \right\}_R$$

\bar{R} : composante algébrique de \vec{N} sur \vec{x}
 Ty : composante algébrique de \vec{T} sur \vec{y}
 Tz : composante algébrique de \vec{T} sur \vec{z}

M_G : composante algébrique de \vec{M}_t sur \vec{x}
 Mfy : composante algébrique de \vec{M}_f sur \vec{y}
 Mfz : composante algébrique de \vec{M}_f sur \vec{z}

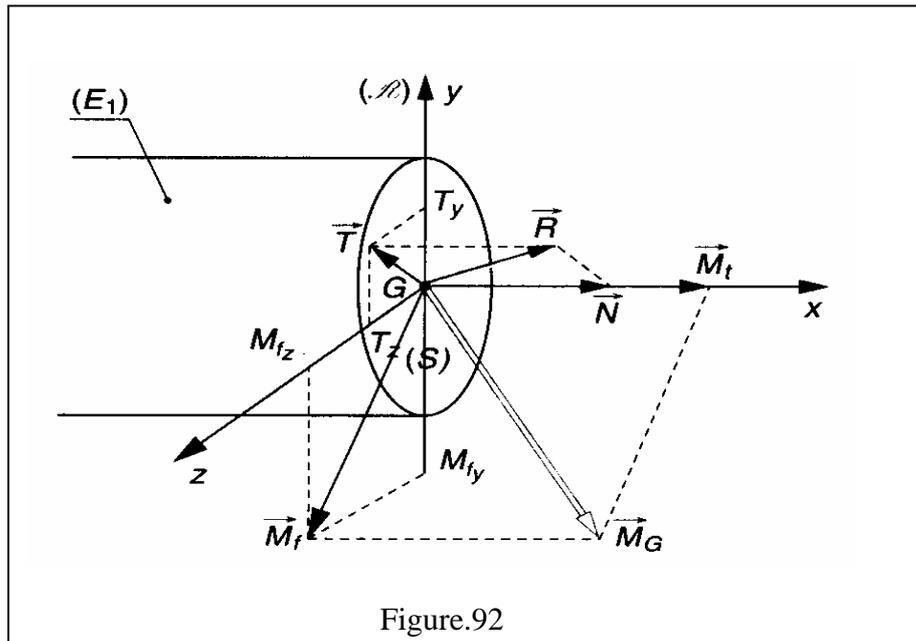


Figure.92

Diagrammes

Les composantes algébriques N, Ty, Tz, Mt, Mfy, Mfz varient en fonction de la position du centre de surface G de la section droite fictive (S) . La représentation graphique des fonctions $N(x); Ty(x); Tz(x); Mt(x); Mfy(x); Mfz(x)$ donne les diagrammes des composantes des éléments de réduction en G du torseur de cohésion.

Exemple 1

Soit une poutre cylindrique, de 200 mm de long et de 5 mm de diamètre, soumise à une action mécanique modélisable par un glisseur avec $\vec{R}_{3 \rightarrow E}$ d'intensité 100 daN.

$$\vec{AC} = a \cdot \vec{x}; a = 150 \text{ mm}$$

$$\vec{AB} = l \cdot \vec{x}; l = 200 \text{ mm}$$

L'étude s'effectuera dans le plan de symétrie (\bar{x}, \bar{y}) figure.93

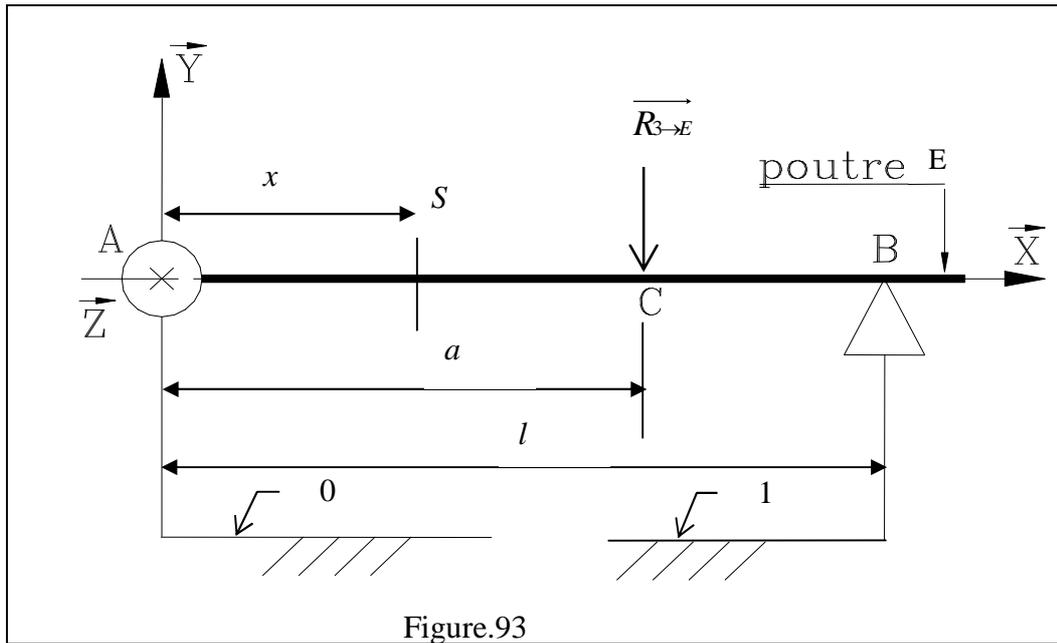


Figure.93

1. DETERMINATION DES ACTIONS EN A ET B

Isolement de la poutre (E)

(E) est soumis à 3 actions mécaniques : $\{T_{0 \rightarrow E}\}, \{T_{1 \rightarrow E}\}, \{T_{3 \rightarrow E}\}$

$$\{T_{0 \rightarrow E}\}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{0 \rightarrow E}} \\ \overrightarrow{M_{A0 \rightarrow E}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} X_{0 \rightarrow E} & 0 \\ Y_{0 \rightarrow E} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \{T_{1 \rightarrow E}\}_B = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}} \\ \overrightarrow{M_{B1 \rightarrow E}} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1 \rightarrow E} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

$$\{T_{3 \rightarrow E}\}_C = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{3 \rightarrow E}} \\ \overrightarrow{M_{C3 \rightarrow E}} \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -100 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

Ecriture des torseurs au point A

$$\{T_{0 \rightarrow E}\}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{0 \rightarrow E}} \\ \overrightarrow{M_{A0 \rightarrow E}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} X_{0 \rightarrow E} & 0 \\ Y_{0 \rightarrow E} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \{T_{1 \rightarrow E}\}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}} \\ \overrightarrow{M_{A1 \rightarrow E}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1 \rightarrow E} & 0 \\ 0 & l \cdot Y_{1 \rightarrow E} \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

$$\{T_{3 \rightarrow E}\}_A = \begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{3 \rightarrow E}} \\ \overrightarrow{M_{A3 \rightarrow E}} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -100 & 0 \\ 0 & -a \cdot 100 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

Ecriture du PFS appliqué à (E)

$$\{T_{\bar{E} \rightarrow E}\}_A = \begin{Bmatrix} X_{0 \rightarrow E} & 0 \\ Y_{0 \rightarrow E} + Y_{1 \rightarrow E} - 100 & 0 \\ 0 & l \cdot Y_{1 \rightarrow E} - a \cdot 100 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \{0\}$$

Equations Résolution

$$X_{0 \rightarrow E} = 0$$

$$Y_{1 \rightarrow E} = \frac{a \cdot 100}{l} = \frac{15000}{200} = 75$$

$$Y_{0 \rightarrow E} = -Y_{1 \rightarrow E} + 100 = -75 + 100 = 25$$

Conclusion

$$\{T_{0 \rightarrow E}\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{0 \rightarrow E} \\ \vec{M}_{A0 \rightarrow E} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 25 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \{T_{1 \rightarrow E}\}_B = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{1 \rightarrow E} \\ \vec{M}_{B1 \rightarrow E} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 75 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

$$\{T_{3 \rightarrow E}\}_C = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{3 \rightarrow E} \\ \vec{M}_{C3 \rightarrow E} \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -1000 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

2. DETERMINATION du torseur de cohésion

Il faut étudier chaque portion de poutre comprise entre deux charges.

POUR $0 < x < c$

Équilibre de E1

$${}_G \{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} -\vec{R}_{\bar{E} \rightarrow E1} \\ -\vec{M}_{G\bar{E} \rightarrow E1} \end{Bmatrix}_G = - \begin{Bmatrix} \vec{R}_{0 \rightarrow E} \\ \vec{M}_{G0 \rightarrow E} \end{Bmatrix}_G = - \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 25 & 0 \\ 0 & -25 \cdot x \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -25 & 0 \\ 0 & 25 \cdot x \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

$$\text{Avec } \vec{M}_{G0 \rightarrow E} = \vec{M}_{A0 \rightarrow E} + \vec{GA} \wedge \vec{R}_{0 \rightarrow E} = 0 + \begin{vmatrix} -x & 0 \\ 0 & 25 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -25 \cdot x \end{vmatrix}$$

POUR $c < x < b$

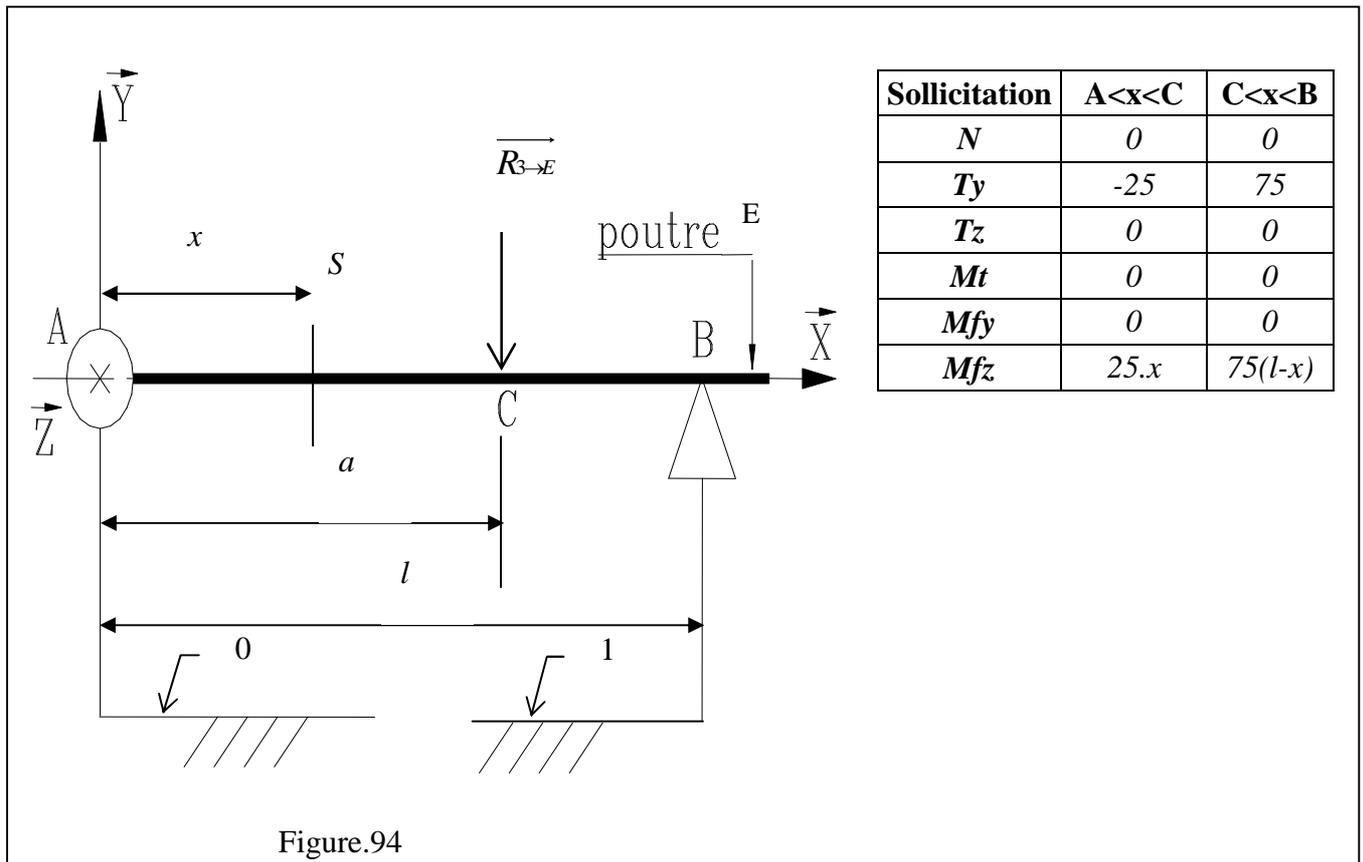
Équilibre de E2

$${}_G \{T_{coh}\}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{\bar{E} \rightarrow E2} \\ \vec{M}_{G\bar{E} \rightarrow E2} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{1 \rightarrow E} \\ \vec{M}_{G1 \rightarrow E} \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 75 & 0 \\ 0 & 75 \cdot (l - x) \end{Bmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

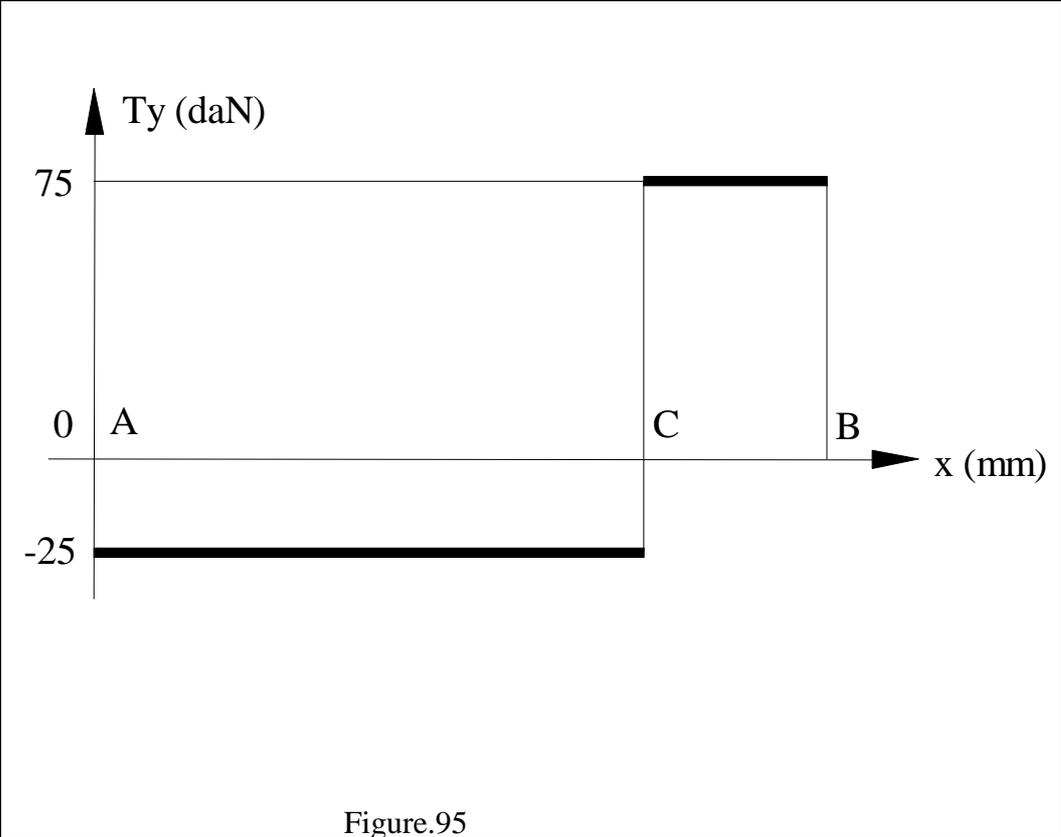
$$\text{Avec } \vec{M}_{G1 \rightarrow E} = \vec{M}_{B1 \rightarrow E} + \vec{GB} \wedge \vec{R}_{1 \rightarrow E} = 0 + \begin{vmatrix} l-x & 0 \\ 0 & 75 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 75 \cdot (l-x) \end{pmatrix}$$

2.COURBES DES EFFORTS INTERIEURS

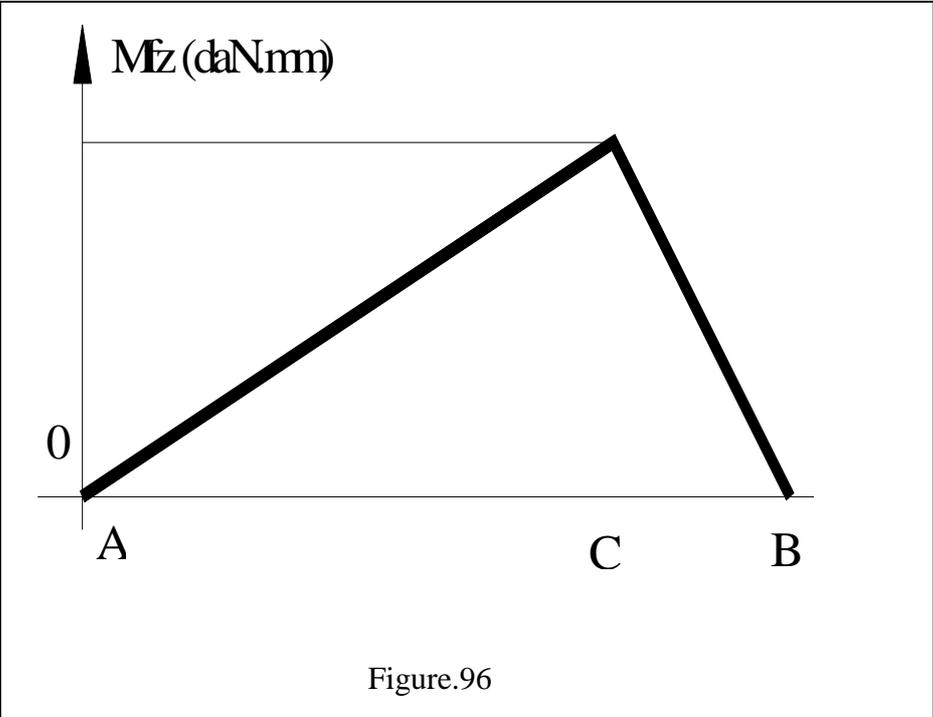
On représente la variation des efforts intérieurs à l'aide de courbes qui visualisent immédiatement les zones dangereuses de la poutre. Figure.94



Effort tranchant



Moment de flexion



Conclusion :

Le torseur de cohésion est variable le long de la poutre

Calculer la pente de M_f sur chaque partie de la courbe : $\tan 1=25$ et $\tan 2=-75$

Existe-t-il un rapport entre la pente de la courbe et l'effort tranchant : oui $T_y = -\frac{dM_{fz}}{dx}$

Remarque :

Pour des cas complexes, on utilise des programmes qui étudient des poutres, des treillis ou des solides et fournissent les résultats sous forme de courbes (efforts intérieurs, contraintes, déformations) ou ensemble de courbes représentant les différents niveaux d'isocontrainte

Exemple 2

Soit une poutre de 3 m de long soumise à 2 actions mécaniques modélisable par :

- une charge concentrée

$$\overrightarrow{R_{3 \rightarrow E}}$$

- une charge répartie \overrightarrow{qL}

Donnes

$$a = 2 \text{ m} ; l = 3 \text{ m}$$

$$\overrightarrow{R_{3 \rightarrow E}} = -1200 \cdot \vec{x} \text{ (N)}$$

$$\overrightarrow{qL} = -900 \cdot \vec{y} \text{ (N/m)}$$

La charge répartie sera ramenée à une charge concentrée au point m centre de la répartition

L'étude s'effectuera dans la plan de symétrie (\vec{x}, \vec{y})

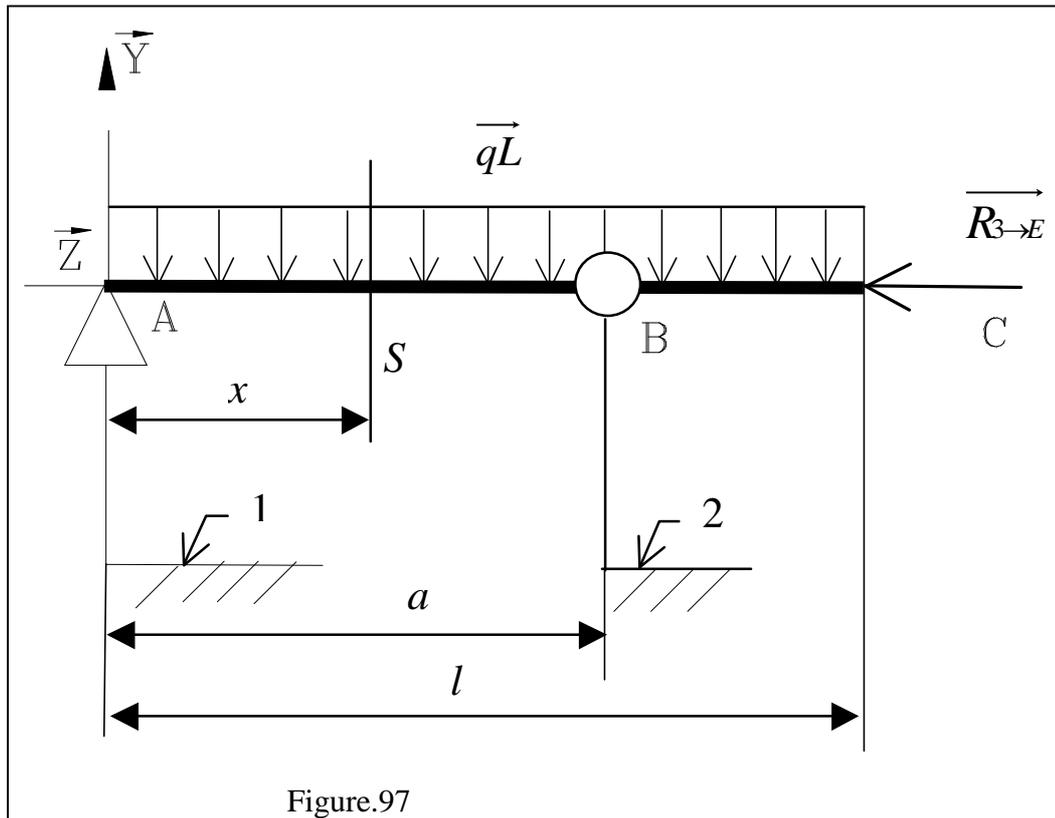


Figure.97

1. DETERMINATION DES ACTIONS EN A ET B

Isolement de la poutre (E)

(E) est soumis à 4 actions mécaniques : $\{T_{1 \rightarrow E}\}, \{T_{2 \rightarrow E}\}, \{T_{3 \rightarrow E}\}, \{T_{chr}\}$

$$\{T_{1 \rightarrow E}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{1 \rightarrow E} \\ \vec{M}_{A1 \rightarrow E} \end{Bmatrix}_A = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_{1 \rightarrow E} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad \{T_{2 \rightarrow E}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{2 \rightarrow E} \\ \vec{M}_{B2 \rightarrow E} \end{Bmatrix}_B = \begin{Bmatrix} X_{2 \rightarrow E} & 0 \\ Y_{2 \rightarrow E} & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\{T_{3 \rightarrow E}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{3 \rightarrow E} \\ \vec{M}_{C3 \rightarrow E} \end{Bmatrix}_C = \begin{Bmatrix} -1200 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

$$\{T_{chr}\} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_{chr} \\ \vec{M}_{mrch} \end{Bmatrix}_m = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -qL.l & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -2700 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Ecriture des torseurs au point B

$$\{T_{1 \rightarrow E}\}_B = \left\{ \frac{\overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}}}{M_{B1 \rightarrow E}} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_{1 \rightarrow E} & 0 \\ 0 & -a \cdot Y_{1 \rightarrow E} \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ Y_{1 \rightarrow E} & 0 \\ 0 & -2 \cdot Y_{1 \rightarrow E} \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

$$\{T_{2 \rightarrow E}\}_B = \left\{ \frac{\overrightarrow{R_{2 \rightarrow E}}}{M_{B2 \rightarrow E}} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{cc} X_{2 \rightarrow E} & 0 \\ Y_{2 \rightarrow E} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

$$\{T_{3 \rightarrow E}\}_B = \left\{ \frac{\overrightarrow{R_{3 \rightarrow E}}}{M_{B3 \rightarrow E}} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{cc} -1200 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

$$\{T_{chr}\}_B = \left\{ \frac{\overrightarrow{R_{chr}}}{M_{Bchr}} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -2700 & 0 \\ 0 & 1350 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \text{avec } m \text{ situe au milieu de AC}$$

Ecriture du PFS appliqué à (E)

$$\{T_{\bar{E} \rightarrow E}\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} X_{2 \rightarrow E} - 1200 & 0 \\ Y_{1 \rightarrow E} + Y_{2 \rightarrow E} - 2700 & 0 \\ 0 & -2 \cdot Y_{1 \rightarrow E} + 1350 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \{0\}$$

Equations Résolution

$$X_{2 \rightarrow E} = 1200 \qquad Y_{1 \rightarrow E} = \frac{1350}{2} = 675$$

$$Y_{2 \rightarrow E} = -Y_{1 \rightarrow E} + 2700 = -675 + 2700 = 2025$$

Conclusion $\{T_{1 \rightarrow E}\}_A = \left\{ \frac{\overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}}}{M_{A1 \rightarrow E}} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 675 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$

$$\{T_{2 \rightarrow E}\}_B = \left\{ \frac{\overrightarrow{R_{2 \rightarrow E}}}{M_{B2 \rightarrow E}} \right\}_B = \left\{ \begin{array}{cc} 1200 & 0 \\ 2025 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \qquad \{T_{3 \rightarrow E}\}_C = \left\{ \frac{\overrightarrow{R_{3 \rightarrow E}}}{M_{C3 \rightarrow E}} \right\}_C = \left\{ \begin{array}{cc} -1200 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

$$\{T_{chr}\}_m = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{rch}} \\ \overrightarrow{M_{mrch}} \end{array} \right\}_m = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -qL.l & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -2700 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

2. Détermination des torseurs de cohésion

Il faut étudier chaque portion de poutre comprise entre deux charges.

POUR $A < x < B$

$$\text{Équilibre de E1} \quad {}_G \{T_{coh}\} = - {}_G \{T_{E \rightarrow E1}^-\} = - ({}_G \{T_{1 \rightarrow E}\} + {}_G \{T_{chr}\})$$

$$\{T_{1 \rightarrow E}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}} \\ \overrightarrow{M_{G1 \rightarrow E}} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 675 & 0 \\ 0 & -675 \cdot x \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \text{avec}$$

$$\overrightarrow{M_{G1 \rightarrow E}} = \overrightarrow{M_{A1 \rightarrow E}} + \overrightarrow{GA} \wedge \overrightarrow{R_{1 \rightarrow E}} = 0 + \begin{vmatrix} -x & 0 \\ 0 & 675 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -675 \cdot x \end{vmatrix}$$

$$\{T_{chr}\}_G = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{rch}} \\ \overrightarrow{M_{Grch}} \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -qL \cdot x & 0 \\ 0 & \frac{qL \cdot x^2}{2} \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -900 \cdot x & 0 \\ 0 & 450 \cdot x^2 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \quad \text{avec}$$

$$\overrightarrow{M_{Gchr}} = 0 + \begin{vmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ -900 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot x = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 900 \cdot x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 450 \cdot x^2 \end{vmatrix}$$

$$\{T_{E \rightarrow E1}^-\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 675 & 0 \\ 0 & -675 \cdot x \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} + \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -900 \cdot x & 0 \\ 0 & 450 \cdot x^2 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 675 - 900 \cdot x & 0 \\ 0 & -675 \cdot x + 450 \cdot x^2 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

$$\{T_{coh}\}_G = - \{T_{E \rightarrow E1}^-\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -675 + 900 \cdot x & 0 \\ 0 & 675 \cdot x - 450 \cdot x^2 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

POUR $B < x < C$

$$\text{Équilibre de E2} \quad {}_G \{T_{coh}\} = {}_G \{T_{E \rightarrow E2}^-\} = {}_G \{T_{3 \rightarrow E}\} + {}_G \{T_{chr}\}$$

$$\{T_{3 \rightarrow E}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{3 \rightarrow E}} \\ \overrightarrow{M_{G3 \rightarrow E}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} -1200 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} \text{ avec}$$

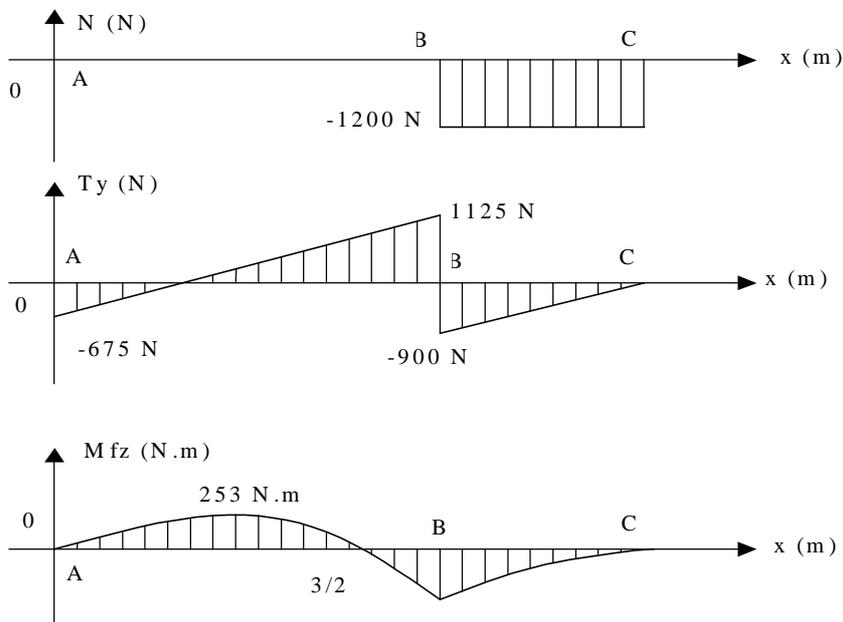
$$\overrightarrow{M_{G3 \rightarrow E}} = \overrightarrow{M_{C1 \rightarrow E}} + \overrightarrow{GC} \wedge \overrightarrow{R_{3 \rightarrow E}} = 0 + \begin{vmatrix} l-x & & -1200 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\{T_{chr}\} = \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{R_{chr}} \\ \overrightarrow{M_{Gchr}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -qL.(l-x) & 0 \\ 0 & (\frac{l-x}{2}).(-qL.(l-x)) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -900.(3-x) & 0 \\ 0 & -450(3-x)^2 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

$$\text{avec } \overrightarrow{M_{Gchr}} = 0 + \begin{vmatrix} \frac{l-x}{2} & & \\ 0 & & -qL.(l-x) \\ 0 & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & \\ \frac{l-x}{2}.(-qL.(l-x)) & & \\ 0 & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ \frac{(l-x)(-qL)(l-x)}{2} & & \\ 0 & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & \\ 0 & & \\ -qL(l-x)^2 & & \\ 0 & & \end{vmatrix}$$

$$\{T_{coh}\} = \{T_{E \rightarrow E2}\} = \left\{ \begin{array}{cc} -1200 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} + \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 900.(x-3) & 0 \\ 0 & 450.(x-3)^2 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})} = \left\{ \begin{array}{cc} -1200 & 0 \\ 900.(x-3) & 0 \\ 0 & 450.(x-3)^2 \end{array} \right\}_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

Courbes des efforts intérieurs



Rappel :

$$y = f(x) = -450.x^2 + 675.x$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 675^2$$

$$x' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-675 - 675}{-900} = \frac{3}{2}$$

$$x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-675 + 675}{-900} = 0$$

$y = f(x)$ s'annule pour $x=0$ et $x=1.5$

$$y' = -900.x + 675$$

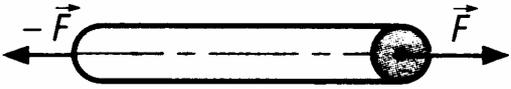
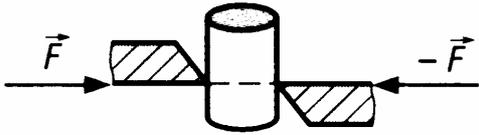
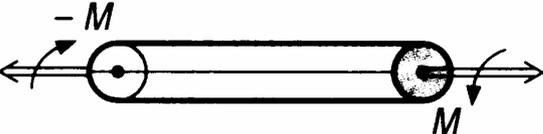
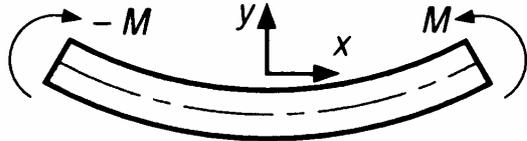
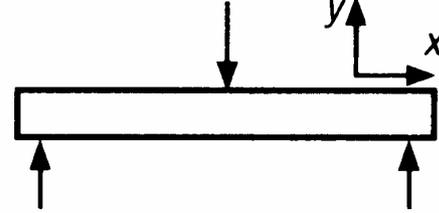
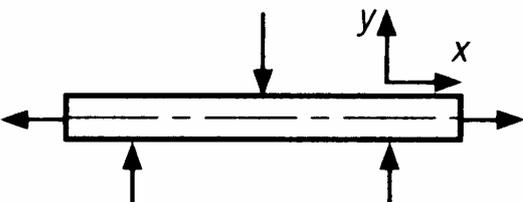
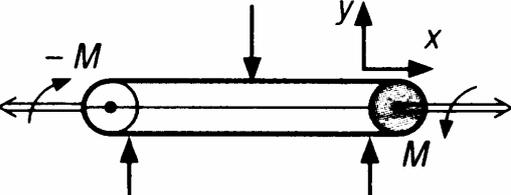
pour $y' = 0$, $x = \frac{3}{4}$

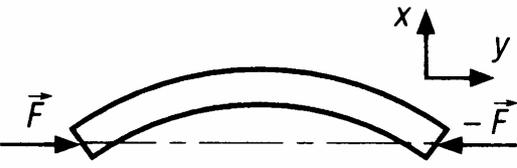
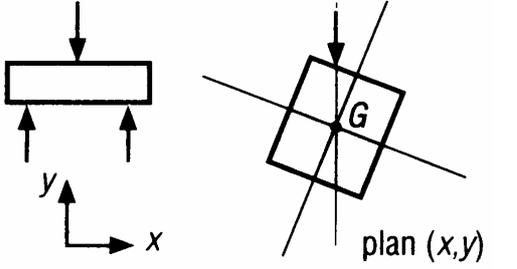
$$f\left(\frac{3}{4}\right) = -450.\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 675.\left(\frac{3}{4}\right) = 253,125$$

= extremum de $f(x)$

Figure.98

EN CONCLUSION LES DIFFERENTS TYPES DE SOLLICITATION SONT:

<p>Traction ou Extension / Compression</p>		${}_{G_s} \{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$
<p>CISAILLEMENT</p>		${}_{G_s} \{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_R$
<p>Torsion</p>		${}_{G_s} \{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_R$
<p>Flexion pure</p>		${}_{G_s} \{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & M_f z \end{Bmatrix}_R$
<p>Flexion simple</p>		${}_{G_s} \{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_f z \end{Bmatrix}_R$
<p>Flexion + traction</p>		${}_{G_s} \{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & M_f z \end{Bmatrix}_R$
<p>Flexion + torsion</p>		${}_{G_s} \{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & M_t \\ T_y & 0 \\ 0 & M_f z \end{Bmatrix}_R$

Flambage		${}_{G_s} \{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Mfz \end{Bmatrix}_R$
Flexion déviée		${}_{G_s} \{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ T_y & 0 \\ 0 & Mfz \end{Bmatrix}_R$ ${}_{G_s} \{T_{coh}\}_R = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Mfy \\ T_z & 0 \end{Bmatrix}_R$

13. POUTRES RECTANGULAIRES AUX ELS

Les éléments en BA soumis à un moment de flexion simple sont généralement calculés à l'état limite de service dans les cas suivants :

- fissuration préjudiciable,
- fissuration très préjudiciable.

Le principe de justification vis-à-vis de la durabilité de la structure conduit à s'assurer du non dépassement des contraintes limites de calcul à l'ELS :

- de compression du béton
- de traction des aciers suivant le cas de fissuration envisagé

Dans le cas de fissuration peu préjudiciable, la calcul ELU sans armature comprimée est déterminant.

13.1. Hypothèses d'études

Les vérifications à effectuer portent sur :

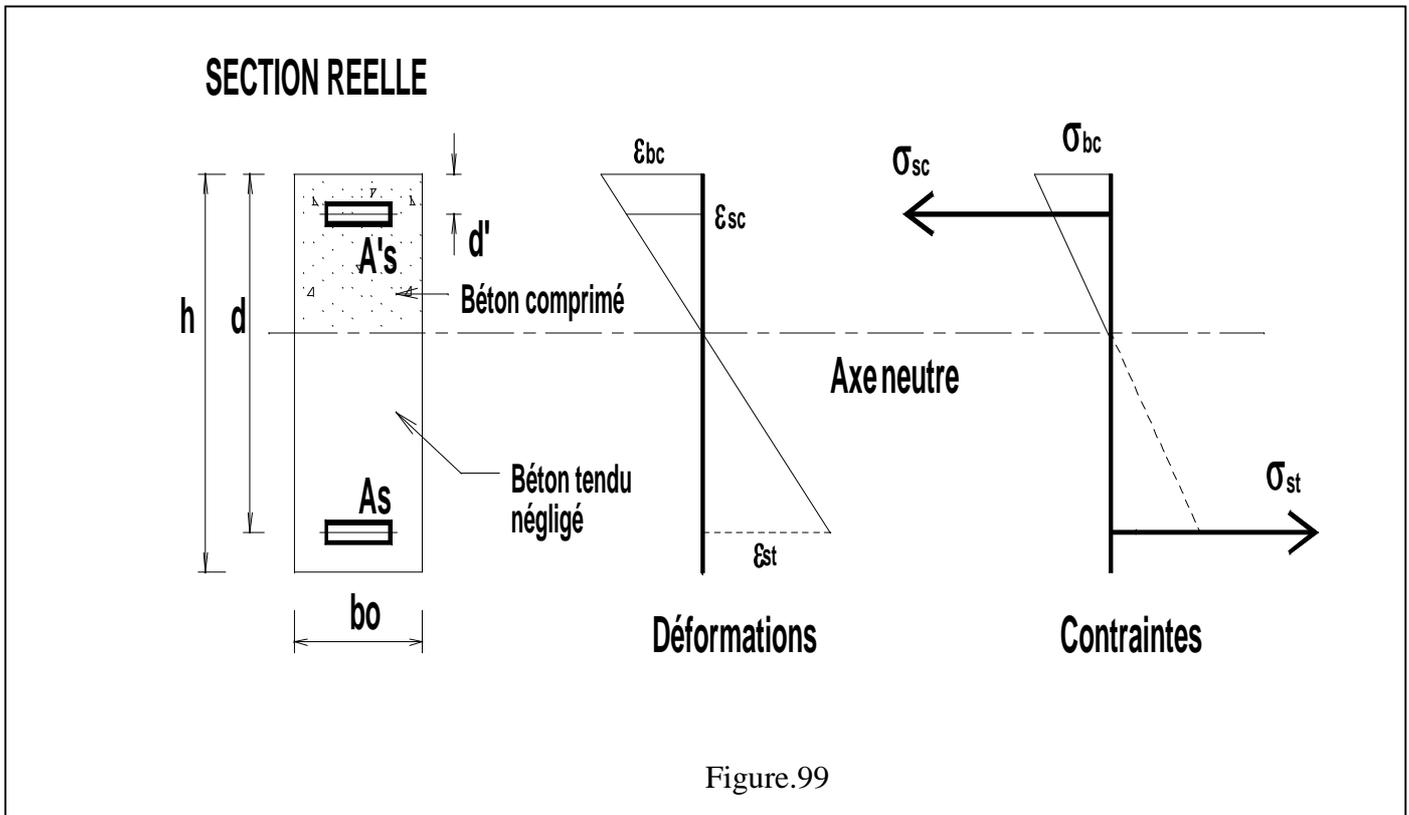
- l'état limite de compression du béton
- l'état limite d'ouverture des fissures

Les règles de calcul en section courante tiennent compte des hypothèses suivantes :

- hypothèse de Navier-Bernoulli: les sections droites restent planes après déformation,
- adhérence mutuelle entre béton et acier sans glissement relatif,
- résistance du béton tendu négligé,
- béton et acier sont considérés comme matériaux linéairement élastiques,
- béton armé considéré homogène :

Dans la réalité, le béton armé est un matériau hétérogène. Pour pouvoir utiliser les résultats de la RDM, nous allons "homogénéiser" la section en remplaçant la section d'acier A_s ou A'_s par une section de béton dite équivalente $n \cdot A_s$ ou $n \cdot A'_s$.

Soit une section droite d'une poutre sollicitée en flexion simple: figure.99



Au centre de gravité des aciers comprimés, la déformation de l'acier est la même que la déformation du béton du fait de l'adhérence. Donc on peut écrire $\varepsilon_s = \varepsilon_{bc}$

D'après la loi de Hooke

$$\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s} = \varepsilon_{bc} = \frac{\sigma_{bc}}{E_b} \Leftrightarrow \sigma_s = \sigma_{bc} \frac{E_s}{E_b}$$

Si l'on pose

$$n = \frac{E_s}{E_b} \Rightarrow \sigma_{bc} = \frac{\sigma_s}{n} \Leftrightarrow \sigma_s = n \cdot \sigma_{bc}$$

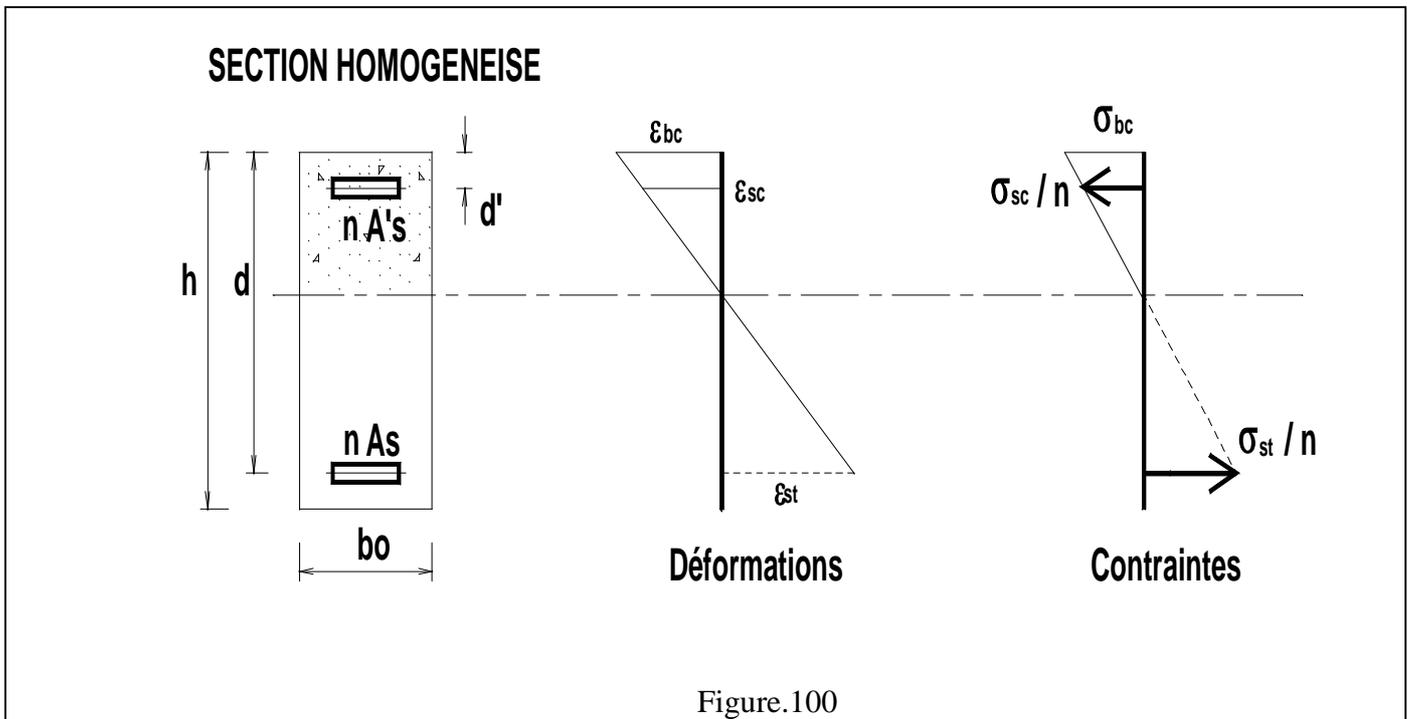
n est appelé coefficient d'équivalence et a pour valeur 15, ce qui signifie qu'une section d'acier "travaille" 15 fois plus que la même section de béton.

L'effort normal dans les armatures est donc :

$$\begin{cases} N_{sc} = A'_s \cdot \sigma_{sc} = A'_s \cdot n \cdot \sigma_{bc} & \text{dans les aciers comprimés} \\ N_{st} = A_s \cdot \sigma_{st} = A_s \cdot n \cdot \sigma_{bc} & \text{dans les aciers tendus} \end{cases}$$

La section d'acier A_s ou A'_s est donc "équivalente" à une section de béton fictif nA_s ou nA'_s .

Suite à ce raisonnement on peut considérer une section dite "homogénéisée" de béton seul avec les diagrammes de déformations et de contraintes suivants: figure.100



Grâce à cette "homogénéisation" nous allons pouvoir considérer la section de béton armé comme une section homogène de béton et appliquer les résultats de la RDM.

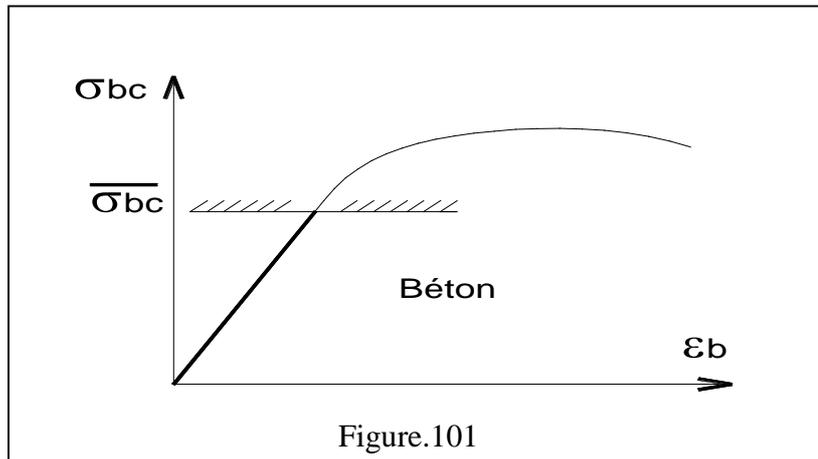
Pour les ELS, les conditions normales d'utilisation de la structure étant satisfaites, les contraintes et les déformations seront celles effectivement atteintes par la structure.

13.2. Contraintes de calcul

1/ Etat limite de compression du béton

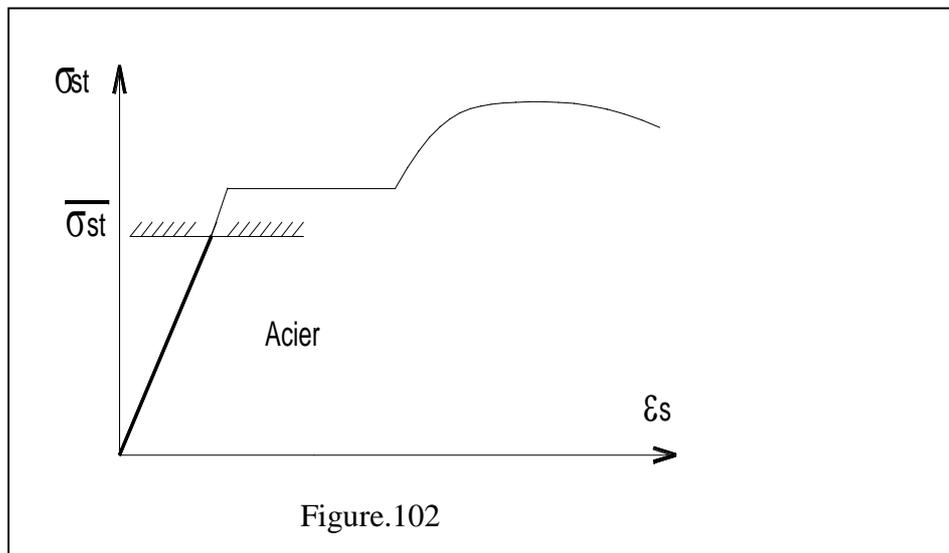
La contrainte de compression du béton est limitée à $0,6f_{cj}$. Figure.101

$$\sigma_{bc} = 0,6 f_{cj}$$



2/ Etat limite d'ouverture des fissures : Figure.102

Il est nécessaire de limiter l'ouverture des fissures dans les pièces en



Contraintes maximales de traction	
$\bar{\sigma}_{st}$ (MPa)	
Fissuration préjudiciable	Fissuration très préjudiciable
$\xi = \text{Min} \left(\frac{2}{3} f_e ; \max \left(0.5 f_e ; 110 \sqrt{\eta \cdot f_{tj}} \right) \right)$	$0,8 \xi$

13.3. Vérification d'une poutre aux ELS

1/ Données :

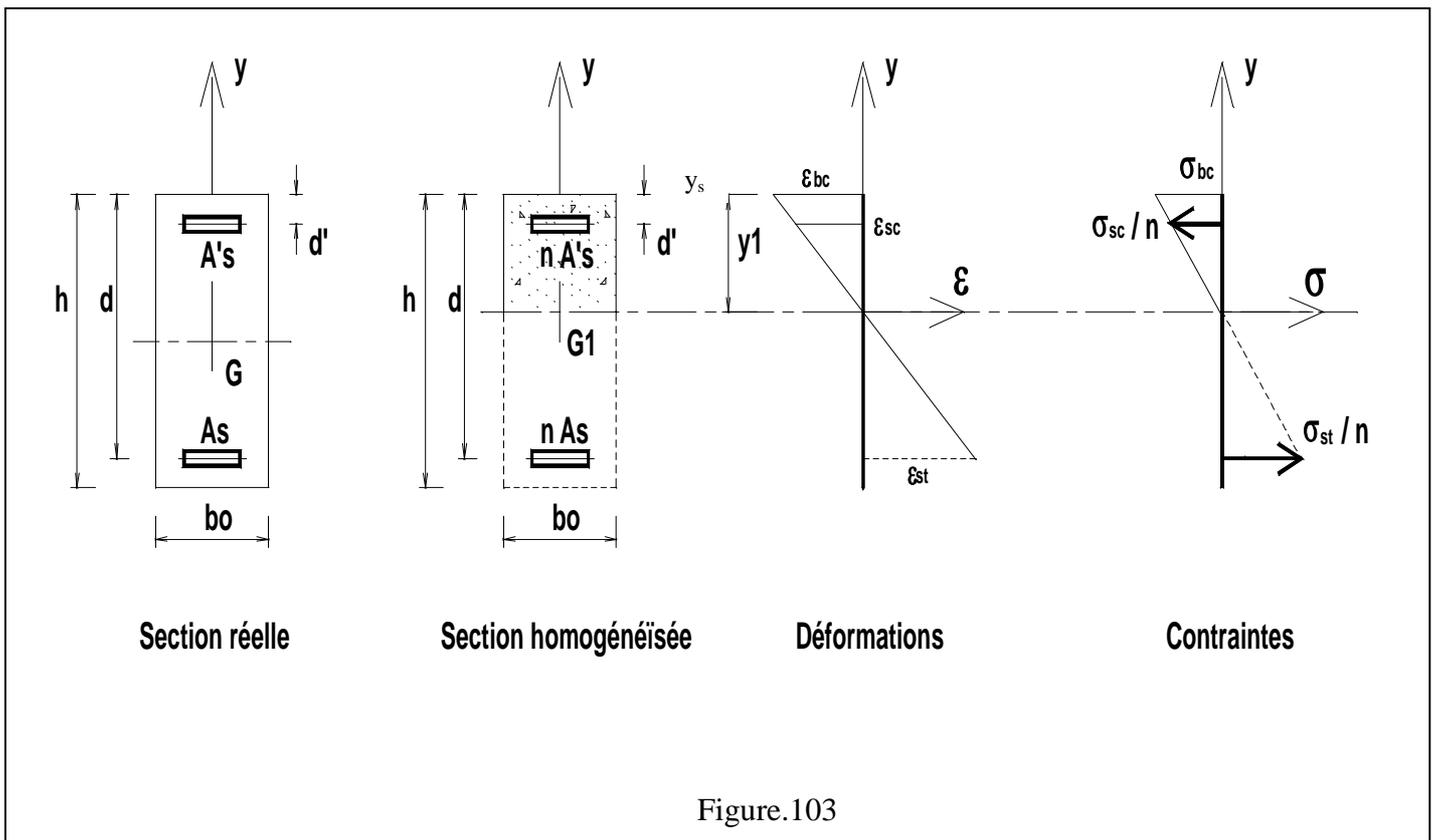
- section de béton (b,h)
- enrobage (d',d)
- sections des aciers (A_s, A'_s)
- M_{ser}

Nous allons voir toutes les vérifications qu'il est théoriquement obligatoire de faire aux E.L.S. vis à vis de la durabilité de la structure. Il faut s'assurer que les contraintes dans les matériaux ne dépassent pas les contraintes admissibles :

$$\sigma_{bc} \leq 0,6 f_{cj} \text{ et } \sigma_s \leq \overline{\sigma}_s$$

Pour déterminer $\sigma_{bc}, \sigma_{sc}, \sigma_{st}$ il faut :

- a/ déterminer y_s (position de la fibre neutre),
- b/ déterminer le moment quadratique de la section homogénéisée (I_h)



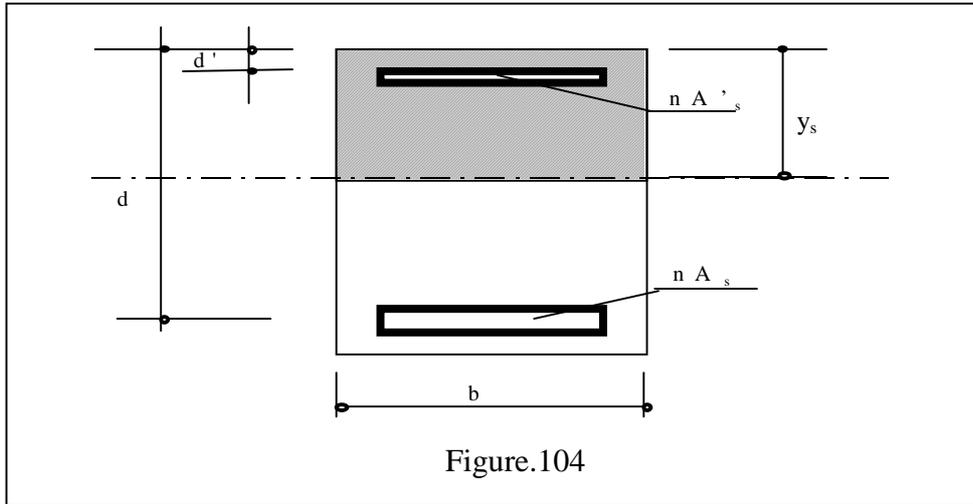
G_1 est le centre de gravité de la section homogénéisée. L'axe horizontal passant par G_1 est donc la fibre neutre de la section homogénéisée.

2/ Position de la fibre neutre : figure.104

Pour déterminer y_s , il suffit d'écrire que le moment statique de la section homogénéisée par rapport à l'axe neutre est égal à zéro.

$$\iint_{Sh} y \cdot dS = \frac{b \cdot y_s^2}{2} + n \cdot A'_s (y_s - d') - n \cdot A_s (d - y_s) = 0$$

La racine positive donne y_s .



3/ Moment quadratique (I_h) :

$$I_h = I_{b/AN} + I_{A_s/AN} + I_{A'_s/AN}$$

avec $I_{b/AN} = \frac{b \cdot y_s^3}{3}$

$$I_{A_s/AN} = n \cdot A_s (d - y_s)^2$$

$$I_{A'_s/AN} = n \cdot A'_s (y_s - d')^2$$

$$\Rightarrow I_h = \frac{b \cdot y_s^3}{3} + n \cdot A_s (d - y_s)^2 + n \cdot A'_s (y_s - d')^2$$

4/ Vérifications des contraintes :

Maintenant que l'on connaît la position de la fibre neutre y_s et l'inertie de la section homogénéisée, on peut vérifier :

- pour la contrainte dans le béton :

$$\sigma_{bc} = \frac{M_{ser}}{I_h} \cdot y_s \leq \overline{\sigma}_{bc}$$

- pour la contrainte dans les aciers tendus :

Le théorème de Thalès donne : $\frac{\sigma_{bc}}{y_s} = \frac{\sigma_{st}/n}{d - y_s} \Rightarrow \sigma_{st} = 15 \sigma_{bc} \frac{(d - y_s)}{y_s}$

$$\sigma_{st} = 15 \frac{M_{ser}}{I_h} \cdot (d - y_s) \leq \overline{\sigma}_s$$

5/ Cas d'une section sans armatures comprimées $A'_s = 0$:

- La formule du moment statique permettant de calculer y_s devient :

$$\iint_{Sh} y \cdot dS = \frac{b \cdot y_s^2}{2} - n \cdot A_s (d - y_s) = 0$$

- L'inertie de la section homogénéisée est égale à :

$$I_h = \frac{b \cdot y_s^3}{3} + n \cdot A_s (d - y_s)^2$$

- Les contraintes à vérifier sont :

- pour le béton : $\sigma_{bc} = \frac{M_{ser}}{I_h} \cdot y_s \leq \overline{\sigma}_{bc}$

- pour les aciers tendus : $\sigma_{st} = 15 \frac{M_{ser}}{I_h} \cdot (d - y_s) \leq \overline{\sigma}_s$

13.4. Dimensionnement d'une poutre aux ELS figure.105

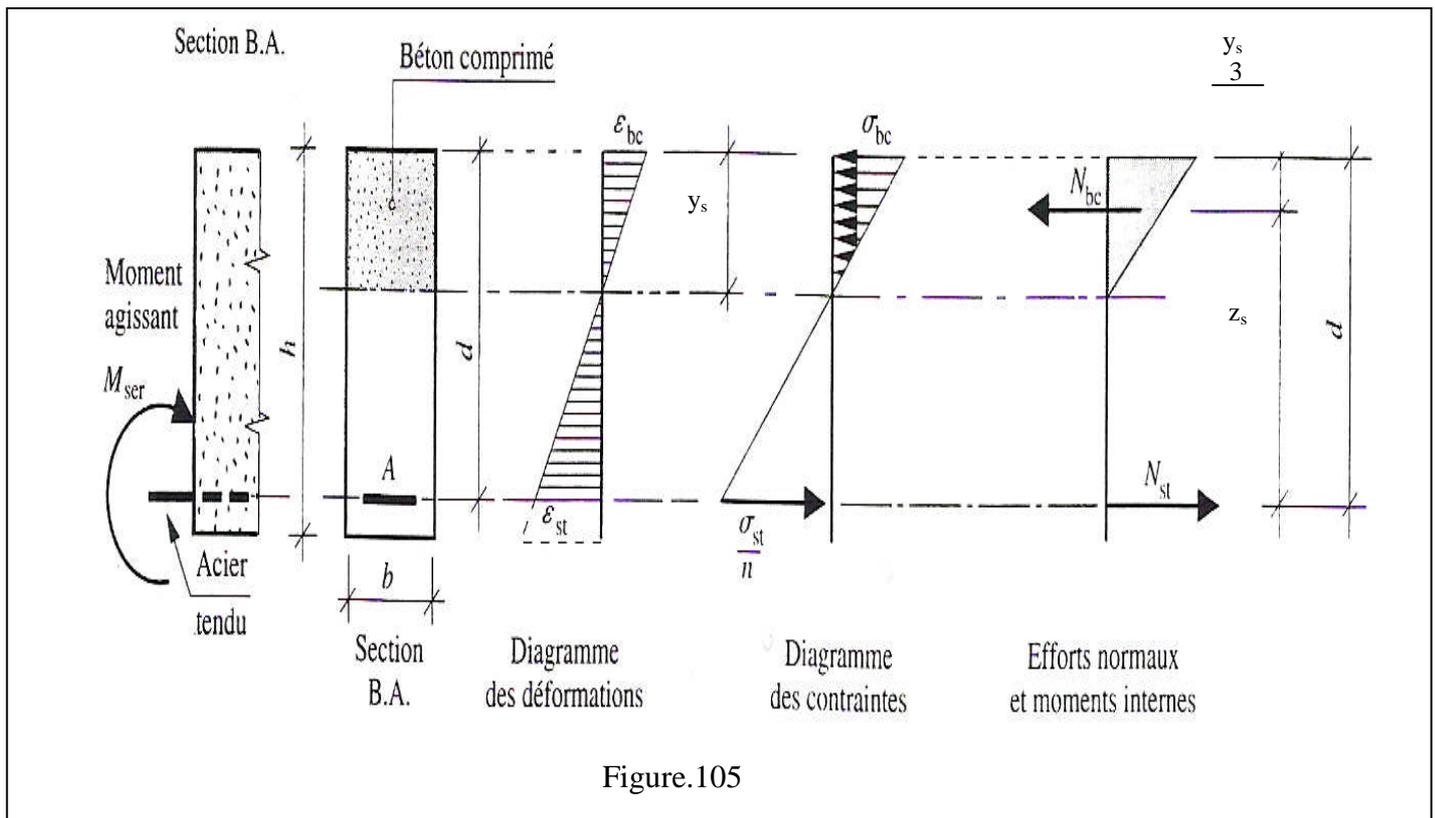


Figure.105

Avec :

N_{bc} : effort normal de compression du béton

N_{st} : effort normal de traction de l'acier A

M_{ser} : moment de flexion sollicitant au niveau du cdg des aciers

$z_s = d - \frac{y_s}{3}$, bras de levier des efforts de compression du béton par rapport au cdg des aciers.

1/ Equations d'équilibre (statique) :

- Equilibre des efforts normaux :

$$\Sigma F = 0$$

$$\Rightarrow N_{bc} = N_{st}$$

$$\Leftrightarrow b \cdot y_s \cdot \frac{\sigma_{bc}}{2} = A_s \cdot \sigma_{st} \quad (1)$$

- Equilibre des moments par rapport au cdg des aciers tendus :

$$\Sigma M (F) = 0$$

$$\Rightarrow M_{ser} = N_{bc} \times z_s = A_s \cdot \sigma_{st} \cdot z_s$$

$$\Leftrightarrow M_{ser} = b \cdot y_s \cdot \frac{\sigma_{bc}}{2} \left(d - \frac{y_s}{3} \right) \quad (2)$$

2/ Equation de compatibilité :

Le théorème de Thalès sur les triangles semblables, appliqué au diagramme des contraintes donne :

$$\frac{\sigma_{bc}}{y_s} = \frac{\sigma_{st} / n}{d - y_s}$$

$$\Rightarrow \frac{15\sigma_{bc}}{\alpha_s} = \frac{\sigma_{st}}{1 - \alpha_s} \Leftrightarrow \alpha_s = \frac{y_s}{d} = \frac{15\sigma_{bc}}{15\sigma_{bc} + \sigma_{st}} \quad (3)$$

On a donc 3 équations pour 4 inconnues : A, y_s , σ_{st} et σ_{bc} . On en peut donc pas dimensionner la section d'acier.

Il va falloir se fixer certain de ces paramètres.

On choisit de faire travailler les matériaux, béton et acier, à leur maximum. Pour cela, on pose donc :

- $\sigma_{st} = \overline{\sigma_{st}}$ contrainte admissible de l'acier,
- $\sigma_{bc} = \overline{\sigma_{bc}}$ contrainte admissible du béton.

On obtient donc les équations suivantes :

- la position de l'axe neutre :

$$\Rightarrow \alpha_s = \frac{y_s}{d} = \frac{15\overline{\sigma_{bc}}}{15\overline{\sigma_{bc}} + \overline{\sigma_{st}}}$$

- le moment résistant béton, M_{rb} , qui est le moment que peut reprendre le béton comprimé seul :

$$\Rightarrow M_{rb} = b \cdot y_s \cdot \frac{\overline{\sigma_{bc}}}{2} \left(d - \frac{y_s}{3} \right)$$

3/ Moment de service réduit :

Posons

$$\mu_s = \frac{M_{ser}}{b \cdot d^2 \cdot \sigma_{bc}} \text{ et } \alpha_s = \frac{y_s}{d}$$

On obtient l'expression :

$$\mu_s = \frac{\alpha_s}{2} \left(1 - \frac{\alpha_s}{3} \right)$$

4/ Calcul de la section d'acier :

Cas n°1 : $M_{ser} \leq M_{rb}$:

Le béton comprimé peut reprendre seul l'effort de compression, donc pas besoin d'aciers comprimés.

⇒ **Calcul uniquement des aciers tendus**

A partir de l'équation des moments, on a : $N_{bc} \times z_s = A_s \cdot \overline{\sigma}_{st} \cdot z_s$

$$\text{Or } N_{bc} \times z_s = M_{rb} \geq M_{ser}$$

$$\text{Donc } M_{ser} \leq A_s \cdot \overline{\sigma}_{st} \cdot z_s$$

$$\boxed{A_s \geq \frac{M_{ser}}{z_s \cdot \overline{\sigma}_{st}}}$$

Cas n°2 : $M_{ser} \geq M_{rb}$:

Le béton comprimé seul ne suffit pas pour reprendre l'effort de compression. On aura donc besoin d'aciers comprimés qui vont reprendre la différence $(M_{ser} - M_{rb})$

⇒ **Calcul des aciers tendus et comprimés**

SECTION HOMOGENEISE

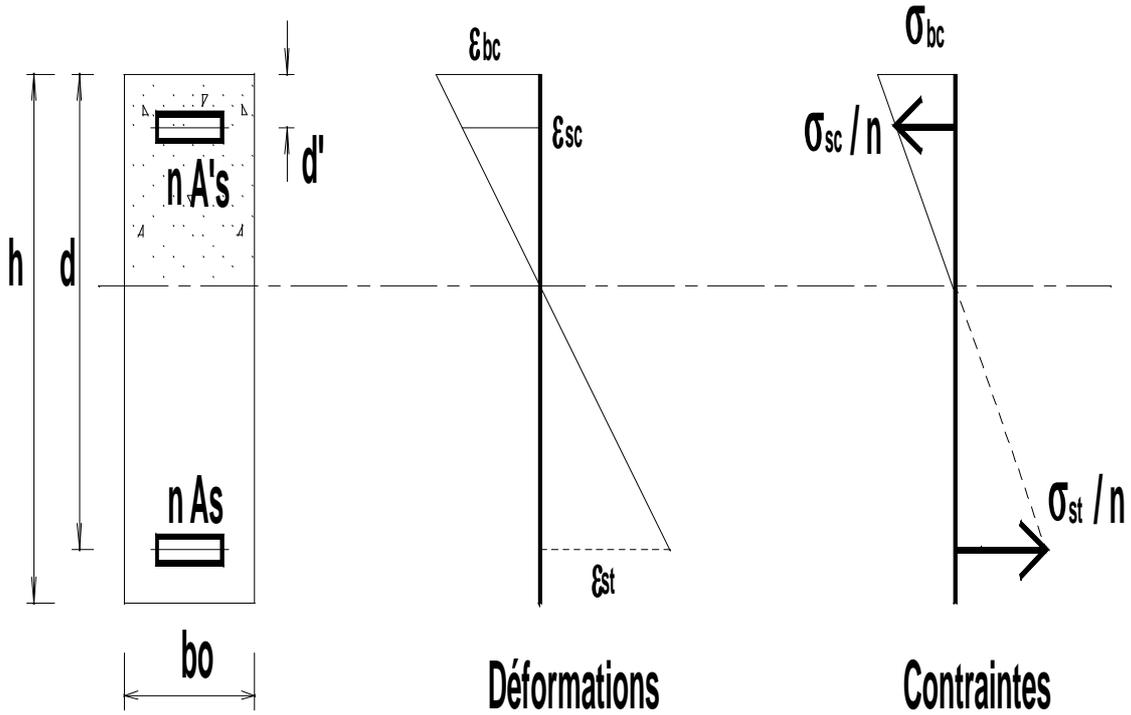


Figure.106

Pour simplifier les calculs, on décompose la section initiale en 2 sections :

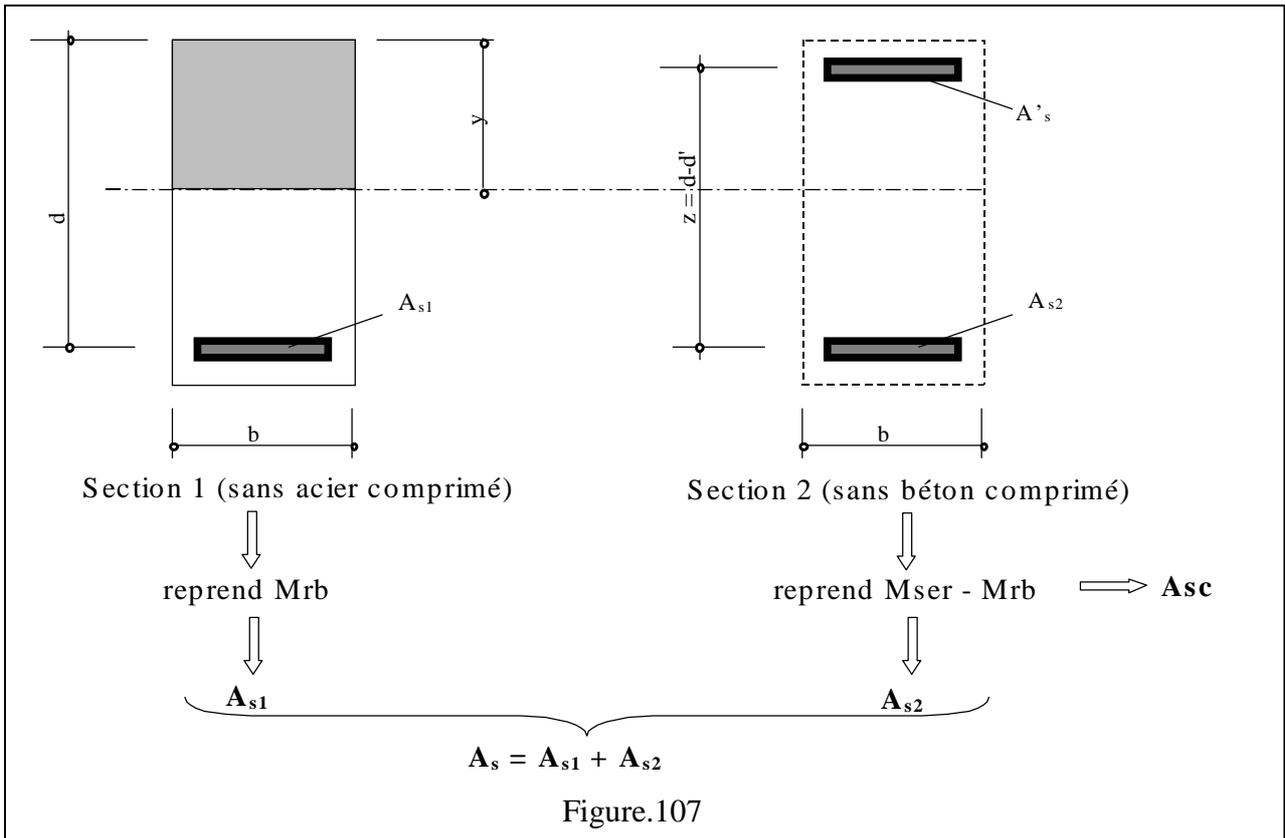


Figure.107

- **Etude de la section 1, sans aciers comprimés :**

Idem cas n°1, sauf que cette section reprend M_{rb} et non M_{ser} :

$$A_{s1} \geq \frac{M_{rb}}{z_s \cdot \sigma_{st}}$$

- **Etude de la section 2, sans béton :**

- Calcul de A'_s :

L'équilibre des moments par rapport au cdg des aciers tendus donne :

$$M_{ser} - M_{rb} = A'_s \cdot \sigma_{sc} \cdot (d - d')$$

$$A'_s = \frac{M_{ser} - M_{rb}}{(d - d') \cdot \sigma_{sc}}$$

La valeur de σ_{sc} est obtenue à l'aide des triangles semblables dans le diagramme des contraintes :

$$\frac{\sigma_{bc}}{y_s} = \frac{\sigma_{sc} / n}{y_s - d'}$$

$$\Rightarrow \sigma_{sc} = \frac{15 \overline{\sigma_{bc}} \cdot (y_s - d')}{y_s}$$

- Calcul de A_{s2} :

L'équilibre des moments par rapport au cdg des aciers comprimés donne :

$$M_{ser} - M_{rb} = A_{s2} \cdot \overline{\sigma_{st}} \cdot (d - d')$$

$$A_{s2} = \frac{M_{ser} - M_{rb}}{(d - d') \cdot \overline{\sigma_{st}}}$$

5/ Condition de non fragilité :

L'article A.4.2 du BAEL sur les conditions de non fragilité des pièces en béton armé se traduit par la vérification:

$$\frac{A_{\min}}{b \cdot d} \geq \frac{0,23 f_{tj}}{f_e}$$

avec : A_{\min} = section d'aciers tendus

f_{tj} = résistance à la traction du béton à j jours d'âge

f_e = limite d'élasticité de l'acier

14. CONTRAINTES PLANES

Les principales sollicitations étudiées précédemment (traction, cisaillement, torsion,...) sont des exemples de contraintes planes.

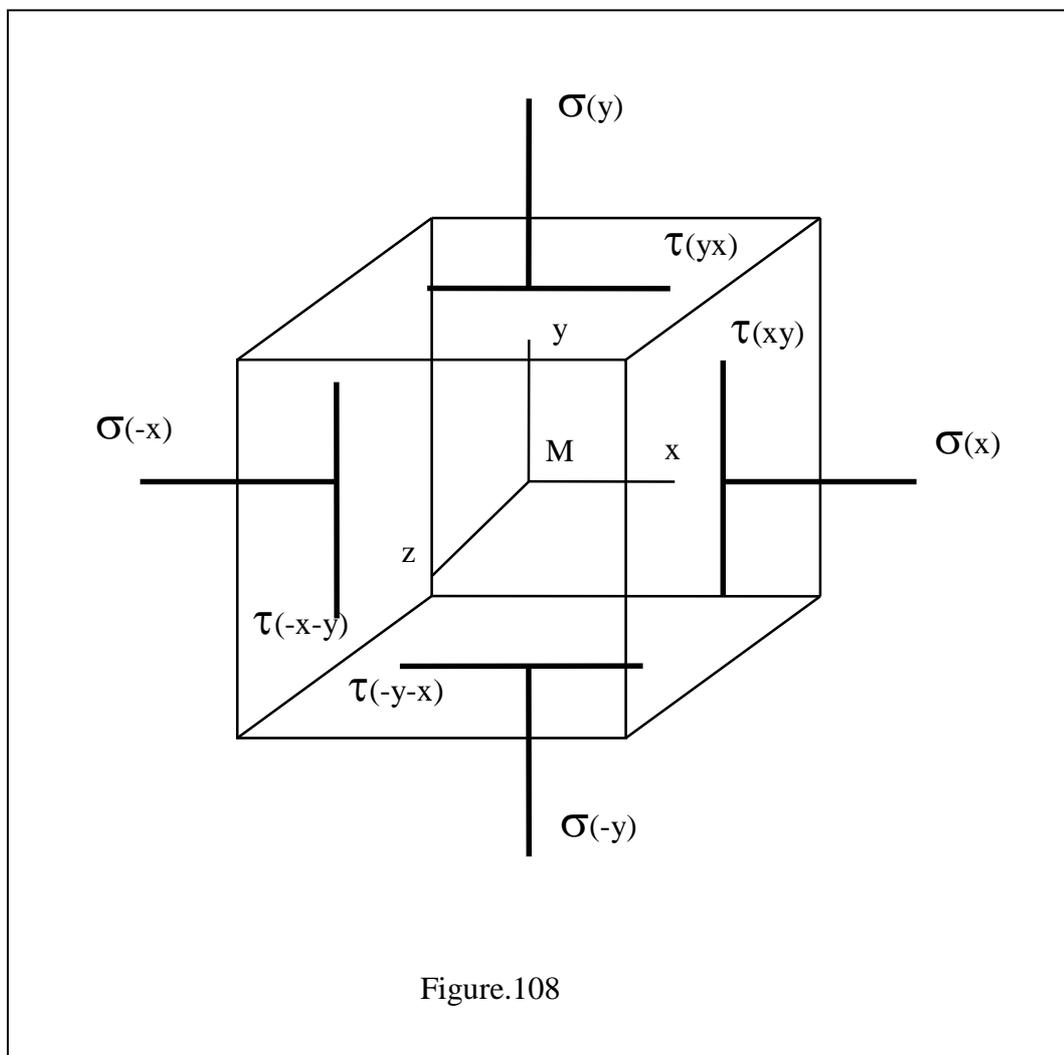
L'analyse des contraintes permet non seulement de reproduire les études faites sur les sollicitations simples, mais permet aussi l'étude de cas plus complexes. Le principe consiste à découper la matière en petits cubes élémentaires afin de faire une étude locale.

$\sigma(x)$: contrainte normale sur la face x

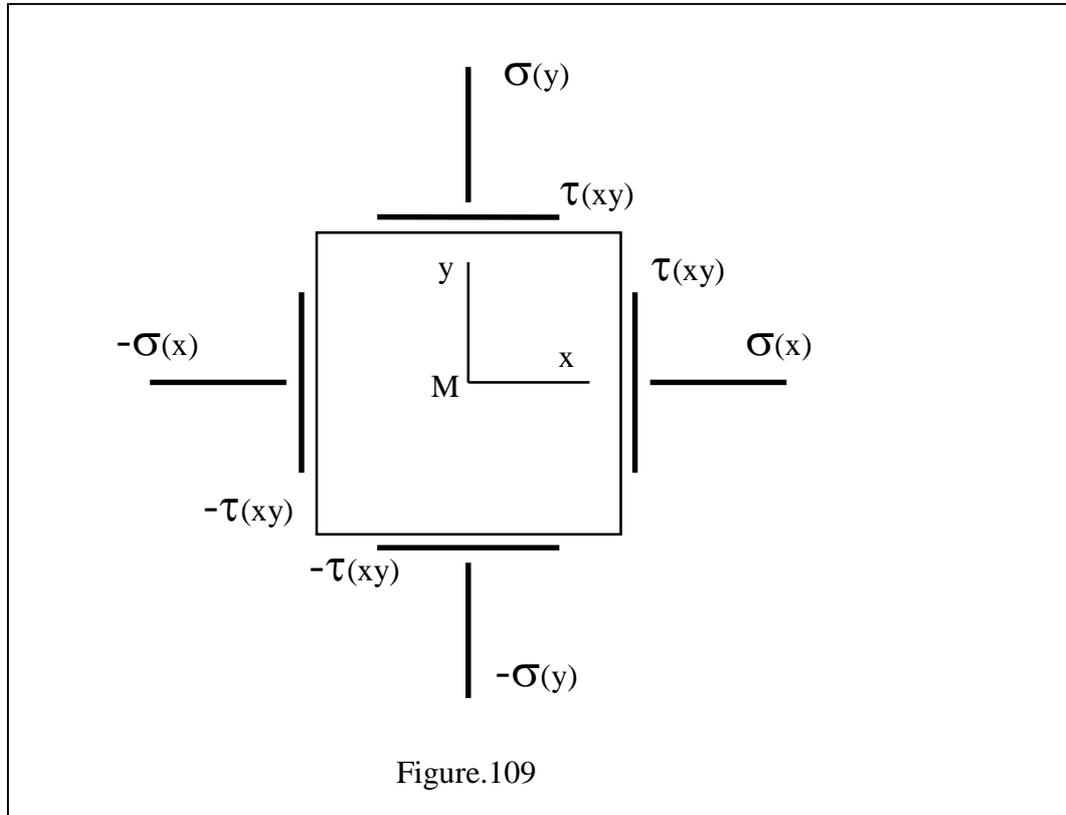
$\tau(xy)$: contrainte tangentielle sur la face x dans la direction y

Un équilibre statique de cet élément permet rapidement d'établir que :

$\sigma(-x) = -\sigma(x)$, $\sigma(-y) = -\sigma(y)$, $\tau(-x-y) = -\tau(xy)$, $\tau(-y-x) = -\tau(yx)$ et aussi $\tau(xy) = \tau(yx)$



On retrouve finalement dans une représentation plane : figure.109

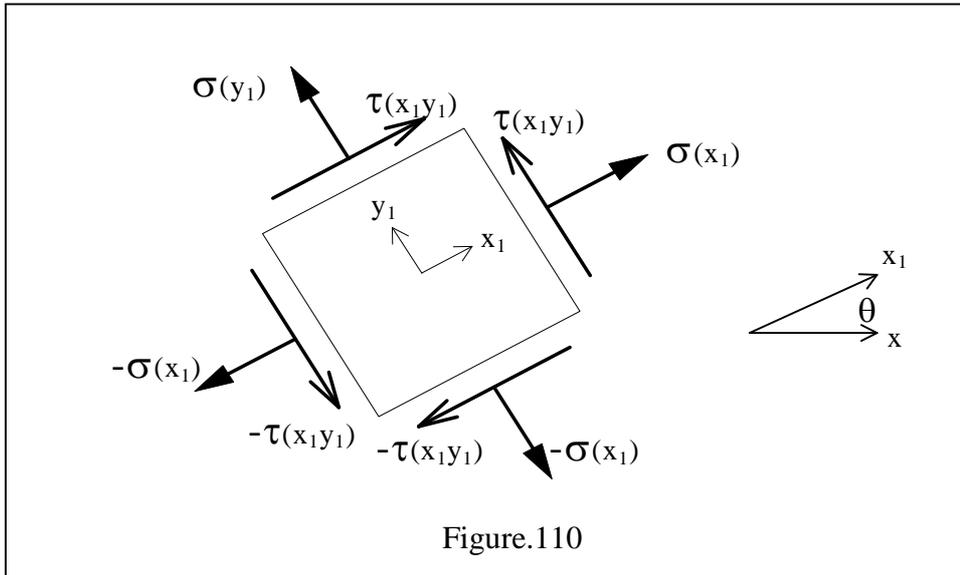


Normalement l'analyse d'un état de sollicitation permet de déterminer $\sigma(x)$, $\sigma(y)$ et $\tau(xy)$

1) **Contraintes dans une section inclinée.**

Etudions l'évolution des contraintes lorsque le cube de référence pivote d'un angle θ autour de z . On pourra alors, connaissant un état de contrainte dans une direction donnée, en déduire tous les états de contraintes dans n'importe qu'elle direction.

On a simplement un changement de repère à réaliser. Figure.110



On peut établir les relations :

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_{x1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2\theta) + \tau_{xy} \cdot \sin(2\theta) \\ \sigma_{y1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \cos(2\theta) - \tau_{xy} \cdot \sin(2\theta) \\ \tau_{x1y1} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot \sin(2\theta) + \tau_{xy} \cdot \cos(2\theta) \end{array} \right.$$

remarque : on peut facilement montrer que $\sigma_{x1} + \sigma_{y1} = \sigma_x + \sigma_y$
 autrement dit la somme des contraintes normales agissant sur des faces parallèles d'un même élément soumis à des contraintes planes est constante.
 (indépendante de θ).

2) Contraintes principales.

On vient de montrer que les contraintes varient en fonction de l'inclinaison θ , or pour le dimensionnement des mécanismes on doit pouvoir trouver l'état de contraintes maximal.

* Contraintes normales principales :

Pour avoir les contraintes maximales σ_{x1} ou σ_{y1} , il faut dériver leur expression et chercher pour quelle valeur de θ (θ_p angle principal) on annule cette dérivée.

On aboutit à la relation :

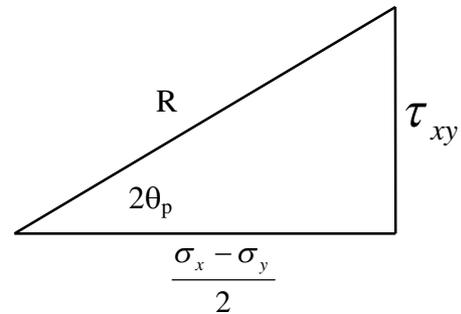
$$\tan(2\theta_p) = \frac{2 \cdot \tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

Comme on passe de σ_{x1} à σ_{y1} par une rotation de 90° , si σ_{x1} est maximale alors

σ_{y1} est minimale et réciproquement.

Posons alors :

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

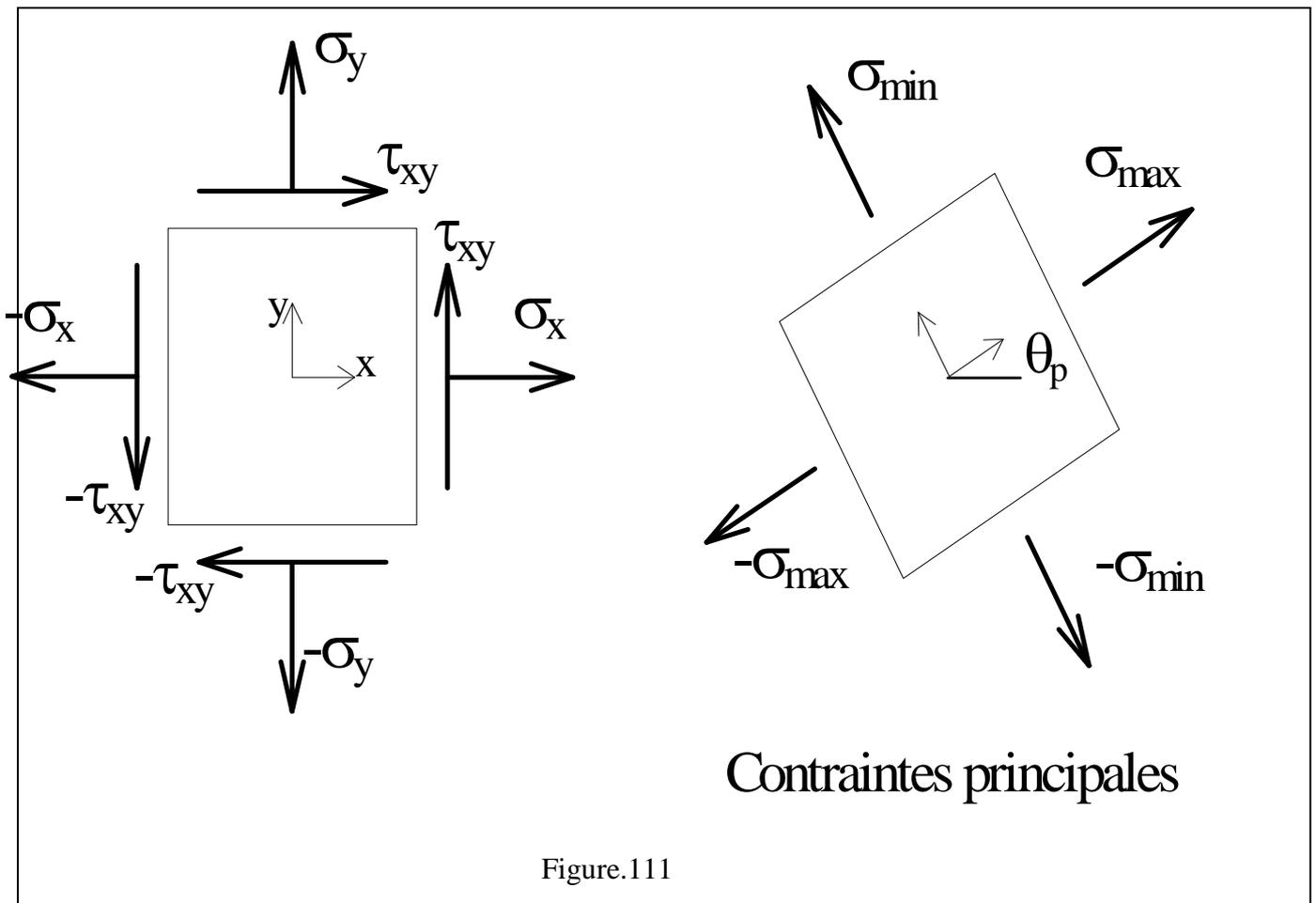


On obtient finalement :

$$\sigma_{x1 \max i} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + R = \sigma_{moyen} + R$$

$$\sigma_{x1 \min i} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - R = \sigma_{moyen} - R$$

remarque : on peut montrer, par le calcul, que lorsque l'on atteint $\sigma_{\max i}$ ou $\sigma_{\min i}$, τ est nulle. figure.111



par exemple, en traction $\theta_p = 0^\circ$ et en cisaillement $\theta_p = 45^\circ$

* **Contraintes de cisaillement maximales :**

Pour avoir les contraintes maximales $\tau_{x_1y_1}$, il faut étudier le signe de sa dérivée. On annule cette dérivée pour $\theta = \theta_c$ (angle de cisaillement).

On aboutit après calcul à :

$$\theta_c = \theta_p \pm 45^\circ$$

Ce qui nous donne :

$$\tau_{x_1y_1 \max i} = R = \frac{\sigma_{\max i} - \sigma_{\min i}}{2}$$

$$\tau_{x_1y_1 \min i} = -R$$

remarque : lorsque l'on a $\theta = \theta_c$, il subsiste des contraintes normales.

$$\sigma_{x_1} = \sigma_{y_1} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \sigma_{\text{moyen}}$$

3) Cercles de Mohr.(pour contraintes planes)

On peut représenter les contraintes à l'aide d'un cercle : le cercle de Mohr figure.112

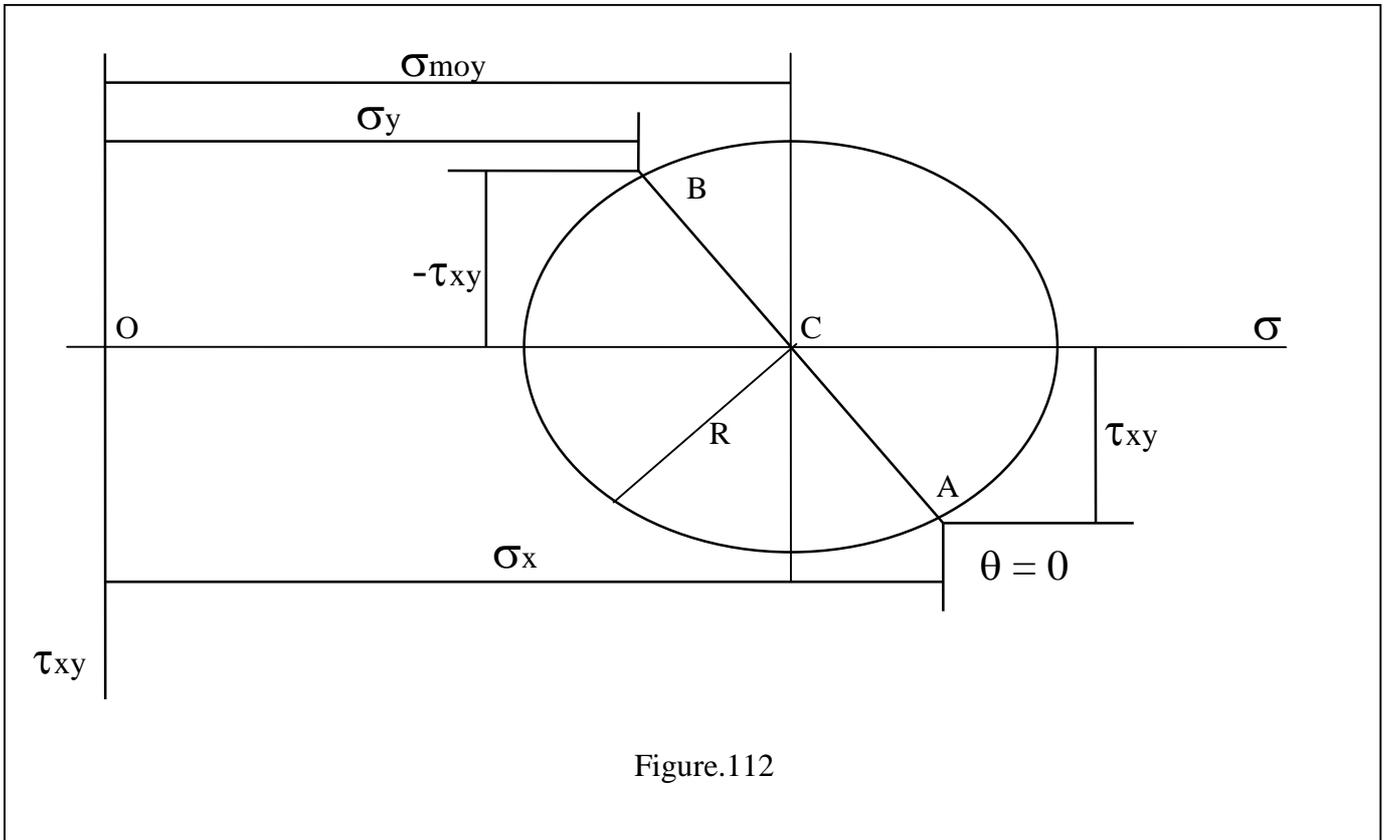


Figure.112

Méthode de tracé

- a) les axes : σ en abscisse (>0 vers la droite) et τ en ordonnée (>0 vers le bas)
prendre une échelle de contrainte.
- b) le centre C situé à la distance $\sigma_{moyen} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ de O.
- c) le point A de coordonnées $(\sigma_x ; \tau_{xy})$.
- d) le cercle de centre C et de rayon AC.

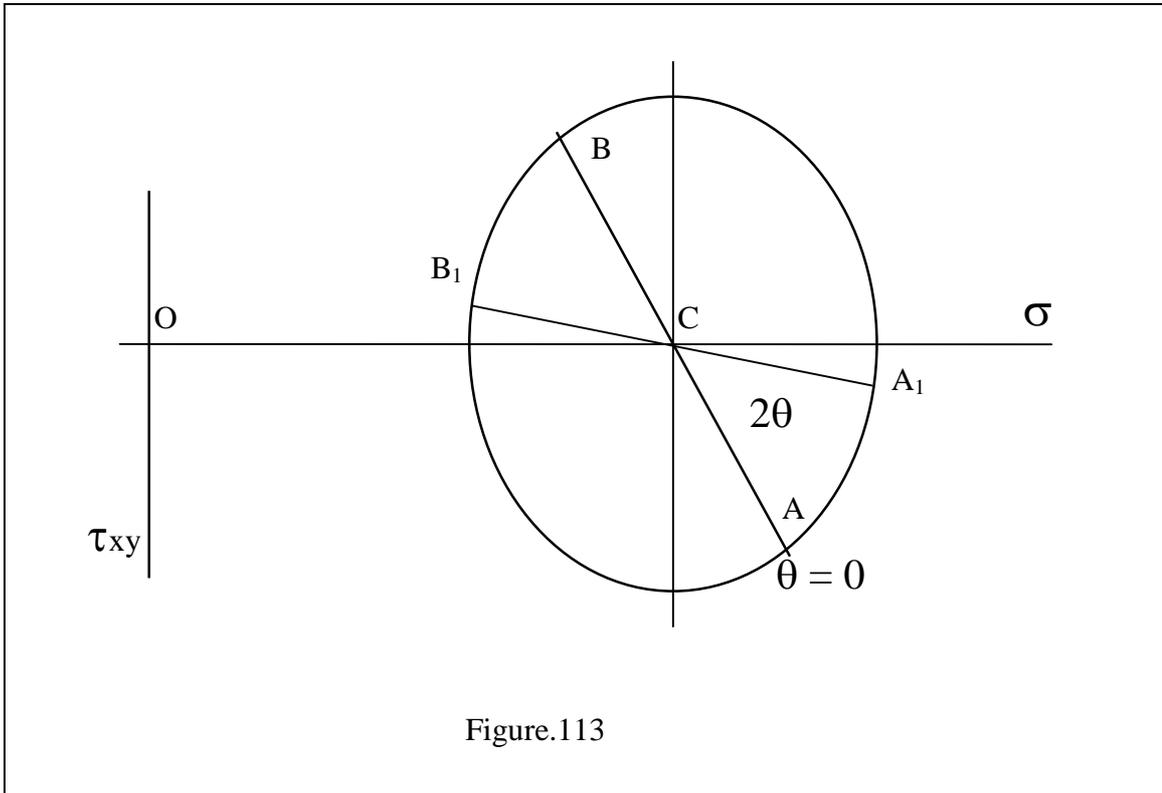
Recherche des contraintes dans une direction x_1 inclinée de θ figure.113

Le diamètre AB sert de référence angulaire ($\theta = 0$).

Il suffit alors de tracer l'angle 2θ (correspondant à θ sur les facettes).

Les coordonnées des points sont alors : $A_1 (\sigma_{x1} ; \tau_{x1y1})$

$B_1 (\sigma_{y1} ; -\tau_{x1y1})$



Recherche des contraintes maximales figure.114

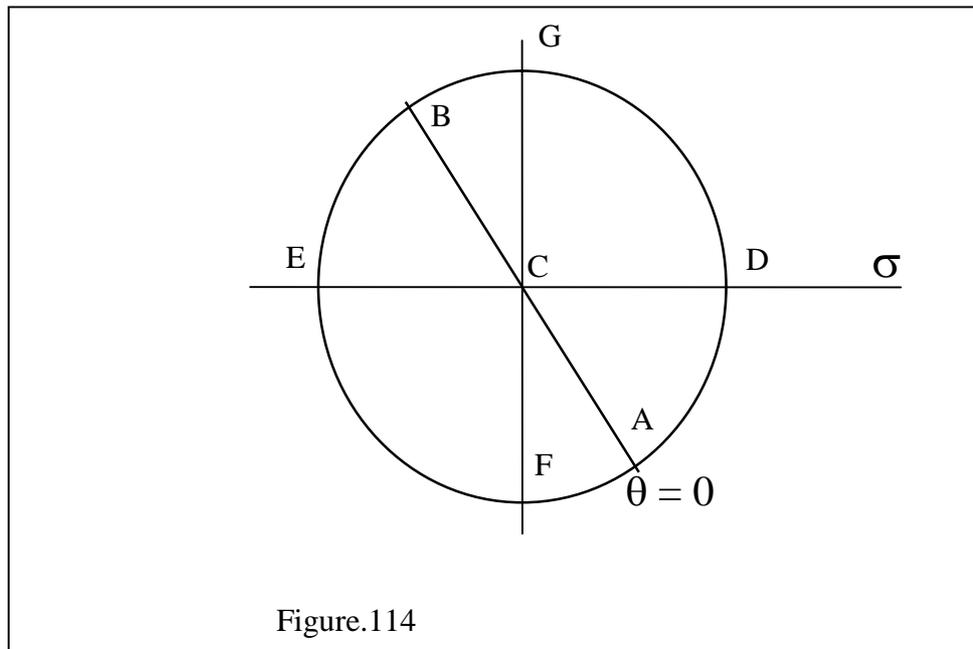
On trouve :

σ_{maxi} au point D

σ_{mini} au point E

τ_{maxi} au point F

τ_{mini} au point G



4.Critère de limite élastique

Afin de réaliser des composants, on doit lors de la conception s'imposer une limite supérieure aux contraintes sollicitants les matériaux. Si le matériau est ductile ou malléable, la référence sera sa limite élastique R_e .

Si le matériau est fragile, la référence sera alors sa résistance à la rupture R_r .

Cependant lorsque les contraintes sont biaxiales (voir même triaxiales) d'autres critères sont nécessaires. Nous allons en voir quelques uns.

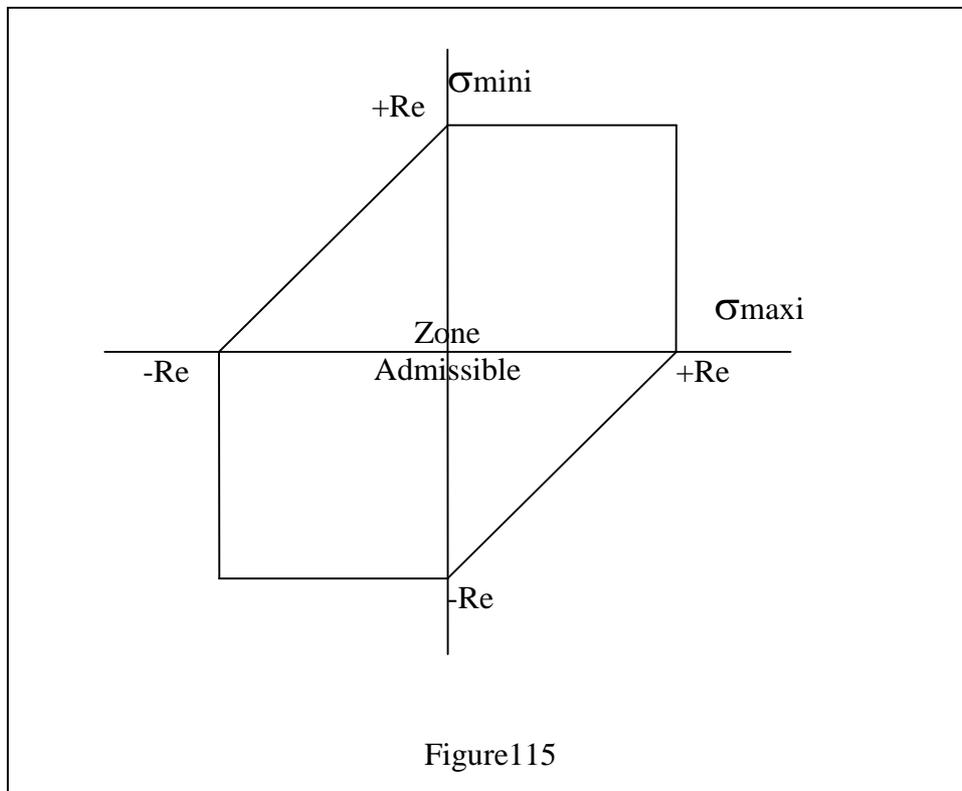
4.1.Critères pour matériaux ductiles ou malléables.

4.1.1.Critère de Tresca ou de la contrainte de cisaillement maximale.

Généralement le mode de rupture de ce type de matériaux est le glissement engendré par les contraintes de cisaillement. On peut écrire :

- si σ_{maxi} et σ_{mini} sont de même signe, alors
- $|\sigma_{maxi}| \leq R_e$ et $|\sigma_{mini}| \leq R_e$
- si σ_{maxi} et σ_{mini} sont de signes contraires, alors
- $|\sigma_{maxi} - \sigma_{mini}| \leq R_e$

Graphiquement on peut retrouver ce critère de Tresca, à savoir :figure.115



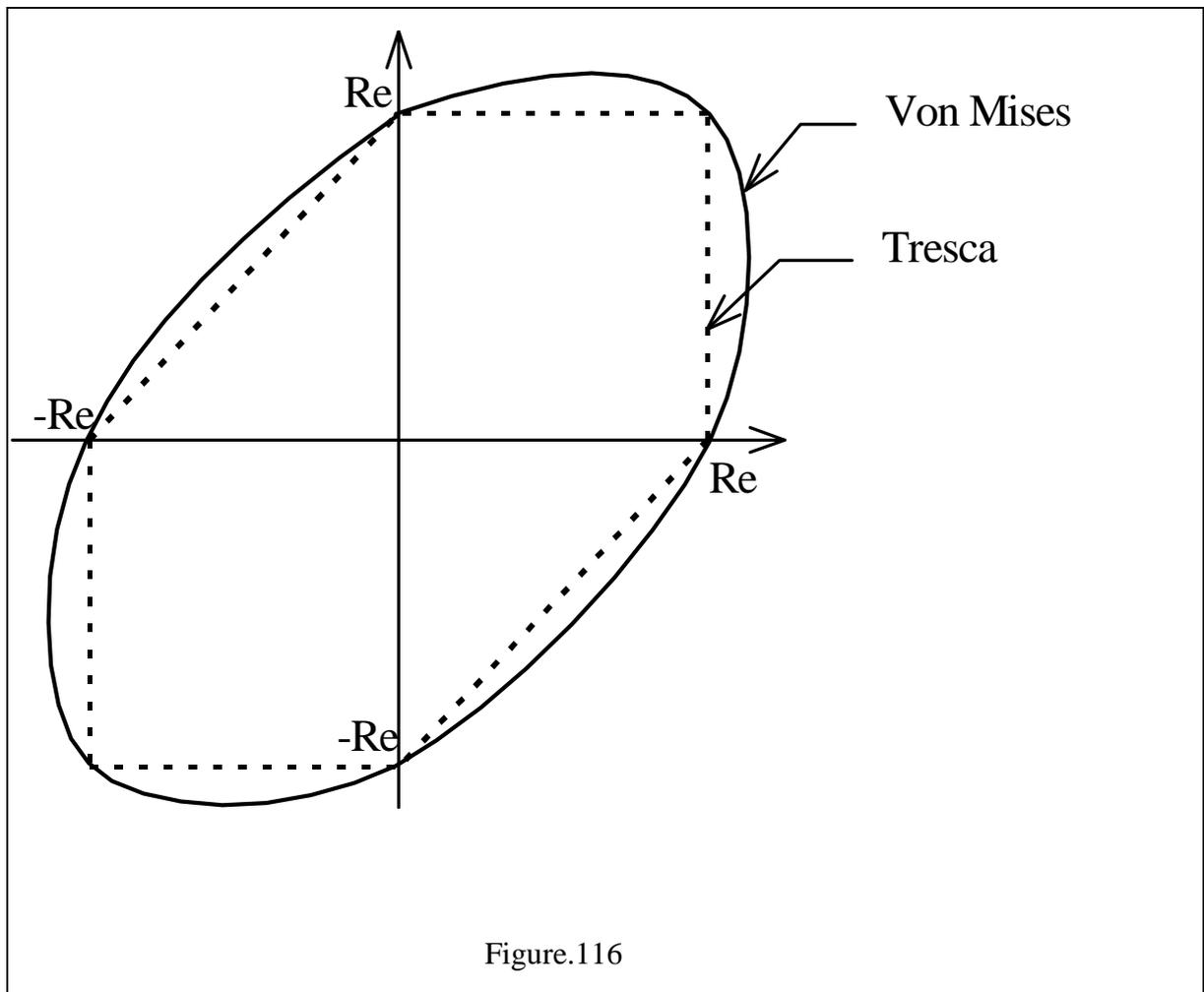
4.1.2. Critère de Von Mises ou de l'énergie de déformation.

Un matériau, lorsqu'il est déformé par une charge extérieure, tend à stocker de l'énergie interne dans son volume (analogie avec les ressorts).

On aboutit après calcul à la relation :

$$\sigma_{\max i}^2 - \sigma_{\max i} \cdot \sigma_{\min i} + \sigma_{\min i}^2 > R_e^2$$

Graphiquement on retrouve par le critère de Von Mises une zone admissible elliptique, à savoir : figure.116



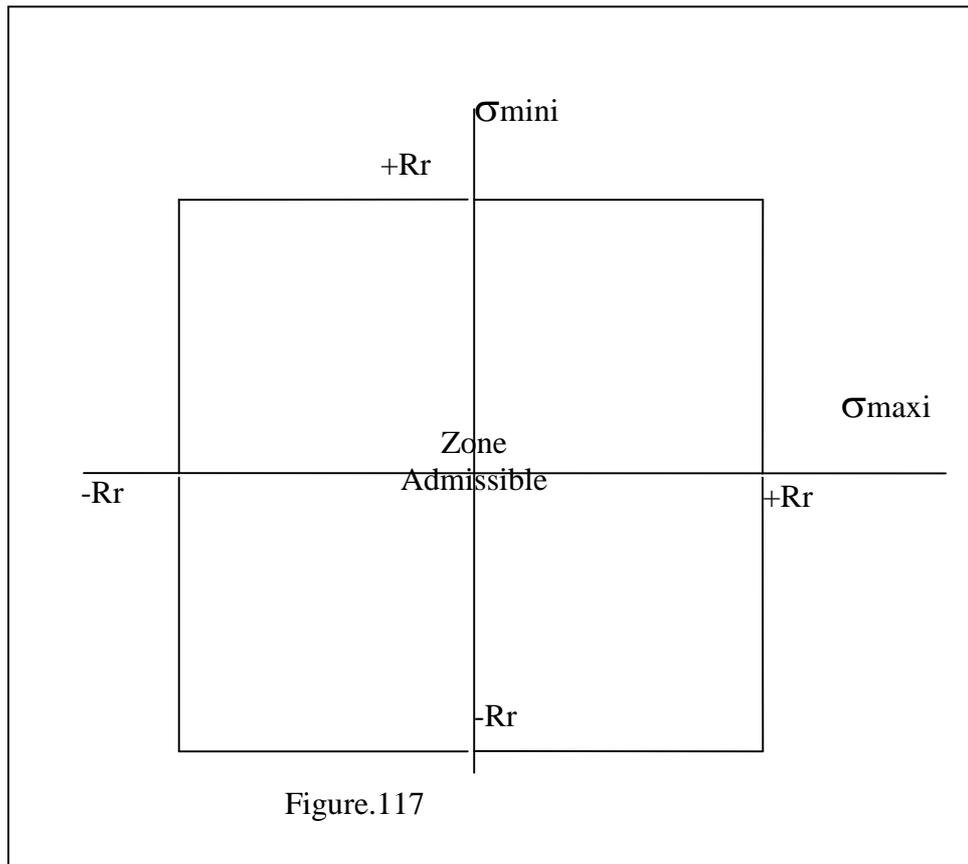
On peut remarquer que le critère de Tresca est plus sévère que celui de Von Mises.

4.2.Critères pour matériaux fragiles.

Schématiquement, lorsqu'un matériau fragile est soumis à un essai de traction, sa rupture se produit soudainement sans déformation plastique préalable. Les contraintes maximales atteignent la limite à la rupture R_r .

4.2.1.Critère de Coulomb ou de la contrainte normale maximale. Figure.117

$$|\sigma_{\max i}| \leq R_r \quad \text{et} \quad |\sigma_{\min i}| \leq R_r$$



Graphiquement on peut retrouver ce critère de Coulomb, à savoir :

4.2.2.Critère de Mohr.

Pour beaucoup de matériaux, les résistances à la rupture en traction R_{rt} et en compression R_{rc} diffèrent. Le critère de Mohr, basé sur des essais expérimentaux, prend en compte cette différence. Figure.118.

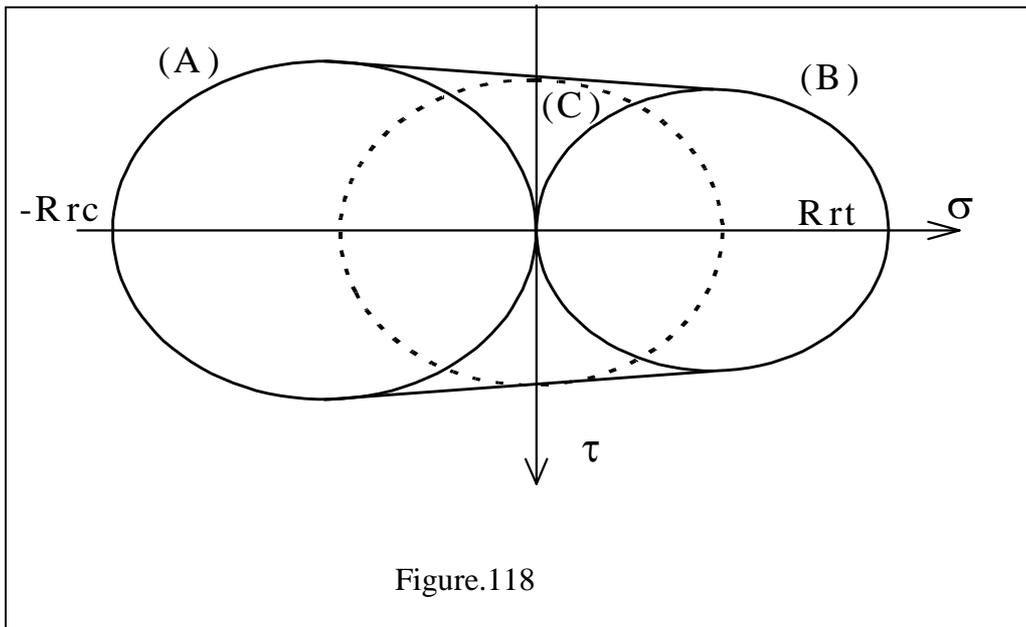


Figure.118

Le cercle (A) traduit une sollicitation de compression pure.

Le cercle (B) traduit une sollicitation de traction pure.

Le cercle (C) traduit une sollicitation de cisaillement pure.

On obtient alors les limites suivantes : figure.119

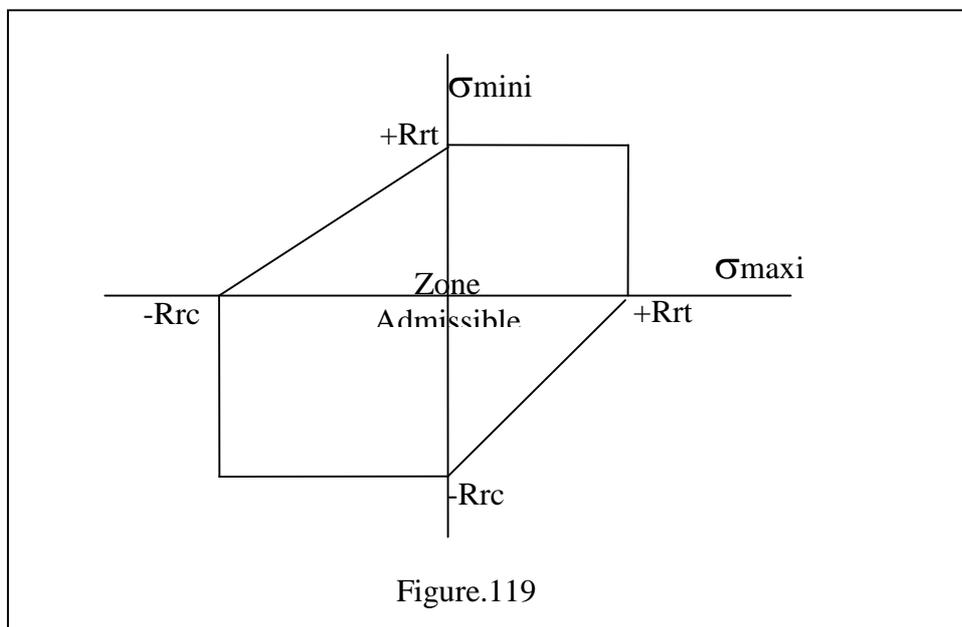
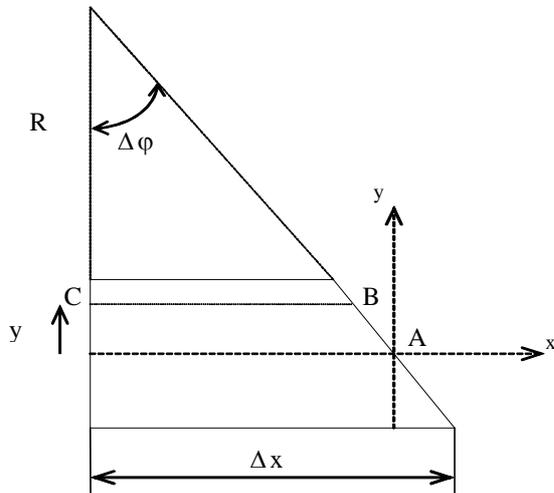


Figure.119

15. DEFORMEE

Il existe un lien entre les contraintes normales σ et les déformations sur y , c'est ce que nous allons établir. Les contraintes normales suivent la loi de Hooke, à savoir : figure.120



$$y = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{(P - k \cdot y) \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

mais grâce à la figure, on peut écrire :

$$\overline{AB} = -y \cdot \tan(\Delta \varphi) \approx -y \cdot \Delta \varphi$$

et

$$\overline{AC} = \Delta x$$

on obtient donc une première relation (1) :

Figure.120

$$\sigma = -E \cdot \frac{y \cdot \Delta \varphi}{\Delta x}$$

Ensuite, sur la figure, on peut remarquer la relation suivante : $R = \frac{\Delta x}{\sin(\Delta \varphi)} \approx \frac{\Delta x}{\Delta \varphi}$

mais en math, on peut constater que R est le rayon de courbure, proportionnel à la dérivée seconde, on

a donc une seconde relation (2) :

$$\frac{1}{y''} \approx \frac{\Delta x}{\Delta \varphi}$$

Enfin, on a établi une relation (3) reliant la contrainte de flexion aux actions mécaniques exercées, à savoir :

$$\sigma = - \frac{Mfz}{I_{Gz}} \cdot y$$

En combinant les 3 relations établies précédemment, on a :

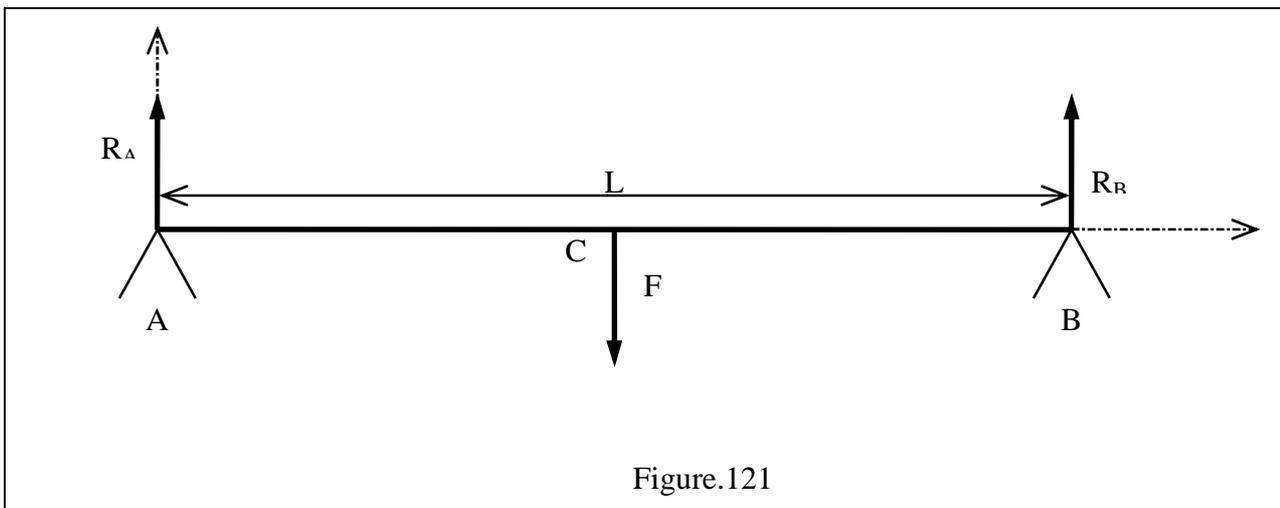
$$-\frac{Mfz}{I_{Gz}} \cdot y = -E \cdot y \cdot y''$$

Si l'on ne se place pas sur la fibre neutre ($y \neq 0$), l'équation de la déformation (déformée) est alors :

$$Mfz = -E \cdot I_{Gz} \cdot y''$$

Il ne faut pas oublier qu'au moins Mf et y'' sont fonction de la position x .
(I_G éventuellement)

Prenons pour exemple un cas simple : une poutre sur deux appuis chargée en son milieu. Figure.121



- On isole la poutre, bilan des actions extérieures, P.F.S., afin de connaître les actions extérieures, ici on a :

$$y = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{(P - k \cdot y) \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

- On recherche le torseur de cohésion, à savoir :

* tronçon BC.

$$\{coh\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ F/2 & 0 \\ 0 & (L - x) \cdot \frac{F}{2} \end{array} \right\}_G$$

* tronçon AC.

$$\{c o h\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ -\frac{F}{2} & 0 \\ 0 & \frac{x \cdot F}{2} \end{array} \right\}_G$$

On est bien en présence d'une sollicitation de flexion simple.

• On recherche alors la déformée :

* tronçon BC.

$$\left[\begin{array}{l} E \cdot I_{Gz} \cdot y''(x) = (L - x) \cdot \frac{F}{2} \\ E \cdot I_{Gz} \cdot y'(x) = L \cdot \frac{F}{2} \cdot x - \frac{F}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 \\ E \cdot I_{Gz} \cdot y(x) = L \cdot \frac{F}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{F}{2} \cdot \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2 \end{array} \right.$$

On trouve alors les constantes C_1 et C_2 à l'aide des conditions aux limites, à savoir, en B pas de déplacement et en C une tangente horizontale (par raison de symétrie), soit :

$$x = L \rightarrow y(x) = 0$$

$$x = \frac{L}{2} \rightarrow y'(x) = 0$$

On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} y' - y = \frac{F \cdot L_1}{E \cdot S} \\ y' - y = \frac{(P - F) \cdot L_0^3}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{F \cdot L_0^3}{3 \cdot E \cdot I} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\frac{3 \cdot F \cdot L^2}{16} \\ C_2 = \frac{F \cdot L^3}{48} \end{cases}$$

On obtient finalement l'équation de la déformée :

$$y_{BC}(x) = \frac{1}{EI} \cdot \left(-\frac{F}{12} \cdot x^3 + \frac{FL}{4} \cdot x^2 - \frac{3FL^2}{16} \cdot x + \frac{FL^3}{48} \right)$$

* tronçon AC.

$$\begin{cases} E \cdot I_{Gz} \cdot y''(x) = x \cdot \frac{F}{2} \\ E \cdot I_{Gz} \cdot y'(x) = \frac{F}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C_3 \\ E \cdot I_{Gz} \cdot y(x) = \frac{F}{2} \cdot \frac{x^3}{6} + C_3 \cdot x + C_4 \end{cases}$$

On trouve alors les constantes C_1 et C_2 à l'aide des conditions aux limites, à savoir, en A pas de déplacement et en C une tangente horizontale (par raison de symétrie), soit :

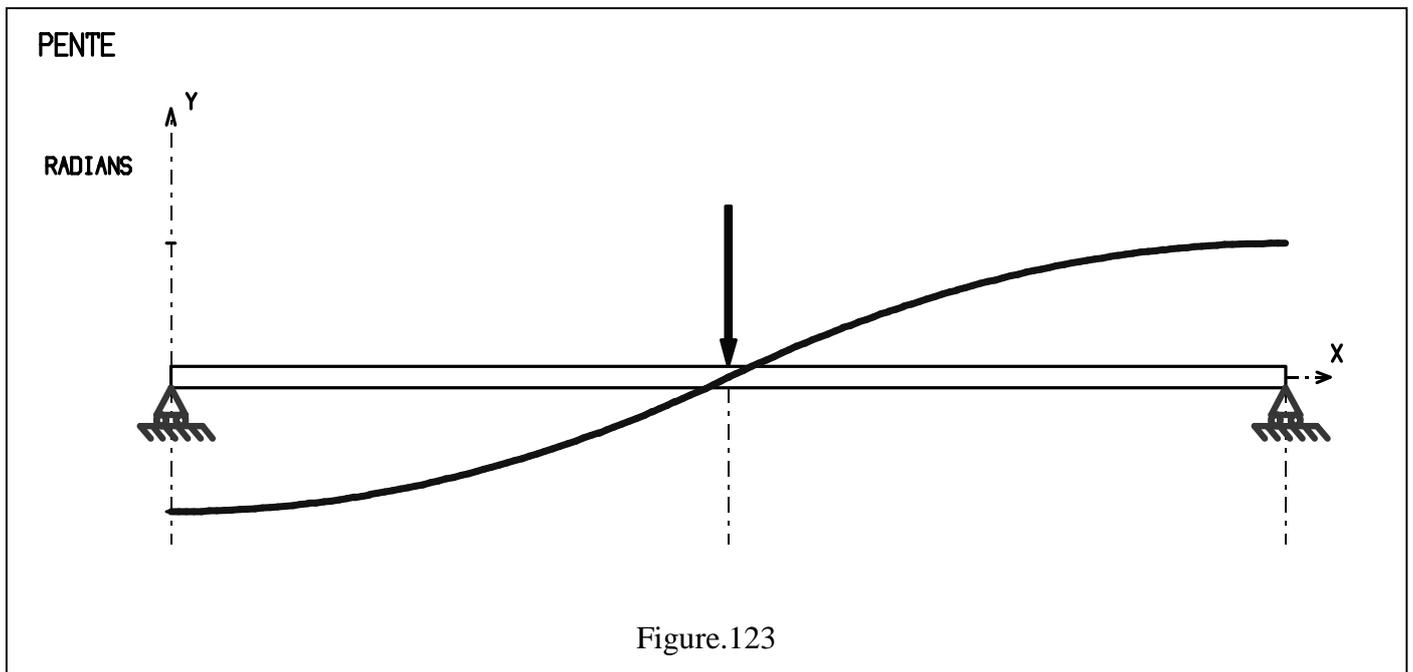
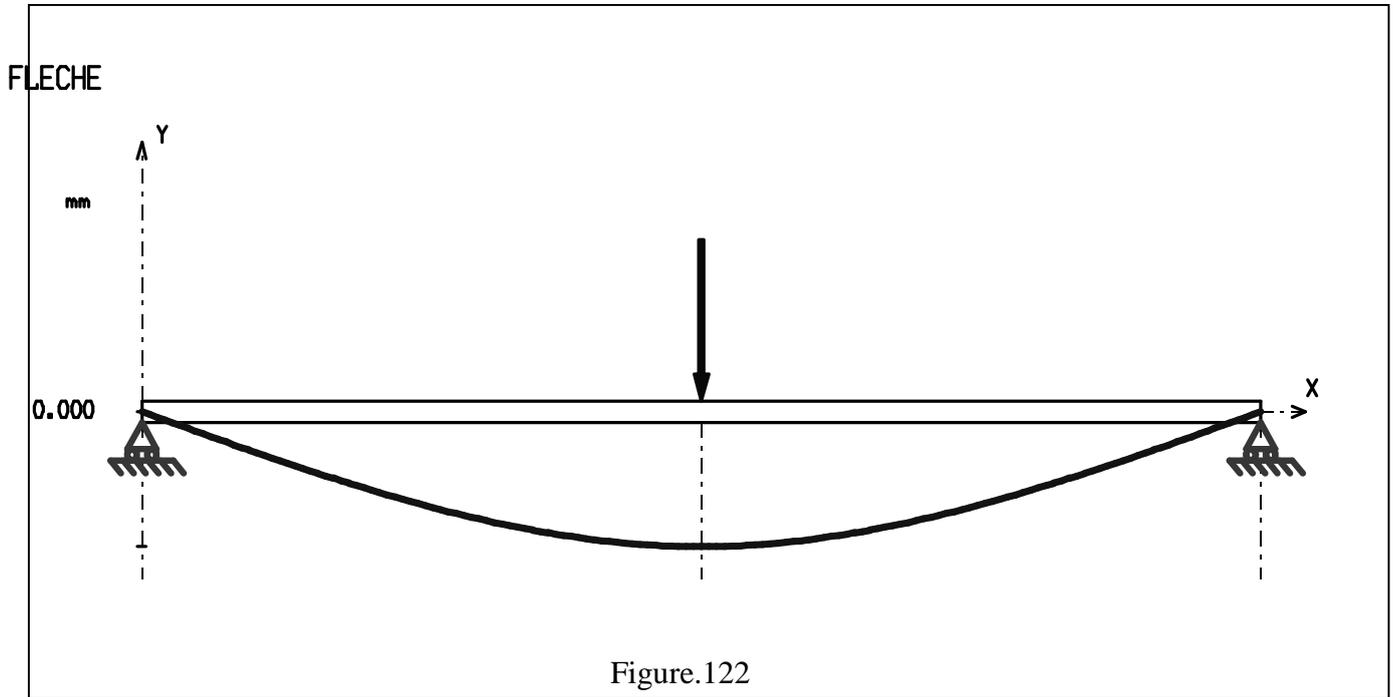
$$x = 0 \rightarrow y(x) = 0$$

$$x = \frac{L}{2} \rightarrow y'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_3 = 0 \\ C_4 = -\frac{F \cdot L^2}{48} \end{cases}$$

On obtient finalement l'équation de la déformée : figure.122 et figure.123

$$y_{AC}(x) = \frac{1}{EI} \cdot \left(\frac{F}{12} \cdot x^3 - \frac{FL^2}{48} \cdot x \right)$$



Les enveloppes minces cylindriques et sphériques (réservoirs, corps de vérin, etc.) soumises à une variation de pression peuvent aussi se calculer à l'aide des relations d'extension-compression.

1. Enveloppe Mince Cylindrique

Au niveau de la coupure, on retrouve la somme des efforts élémentaires dF , dus à la pression. Chacun d'entre eux peut se décomposer en une composante sur x et une composante sur y . La symétrie par rapport à x annule deux à deux les composantes sur y . On a donc au niveau de la coupure uniquement un effort porté par x . C'est bien une sollicitation de traction. Figure.124

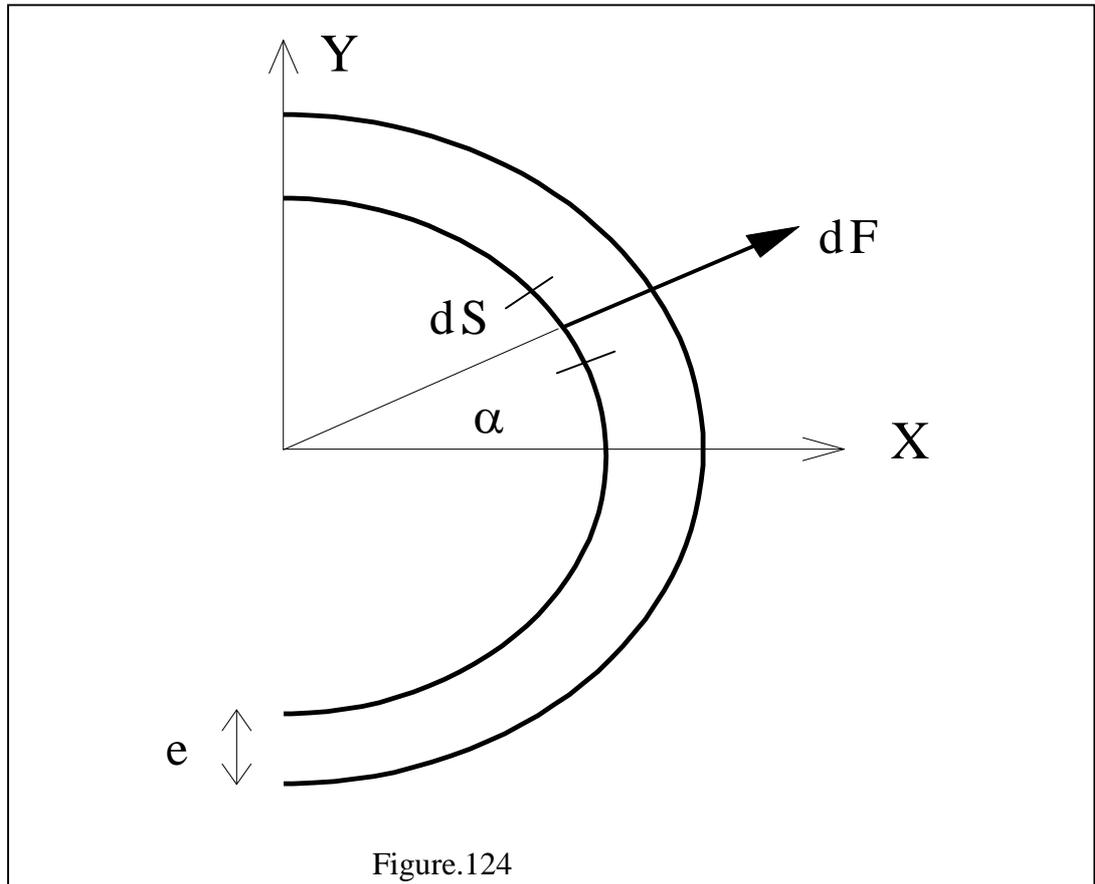


Figure.124

$$N = \iint_S d\vec{F} \cdot \vec{x} = \iint_S dF \cdot \cos \alpha = \iint_S p \cdot dS \cdot \cos \alpha$$

$$N = \int_L dh \int_{\alpha} p \cdot R \cdot \cos \alpha \cdot d\alpha = L \cdot p \cdot R \cdot [\sin \alpha]_{-\pi/2}^{+\pi/2}$$

$$N = L \cdot p \cdot R \cdot 2 = p \cdot D \cdot L$$

En traction on connaît l'expression de la contrainte, sachant que la section normale est : $2 \cdot e \cdot S$

On a alors :

$$\sigma = \frac{p \cdot D \cdot L}{2 \cdot e \cdot L} = \frac{p \cdot D}{2 \cdot e}$$

2. Enveloppe Mince Sphérique

Par un calcul analogue, on peut établir que :

$$\sigma = \frac{p \cdot D}{4 \cdot e}$$

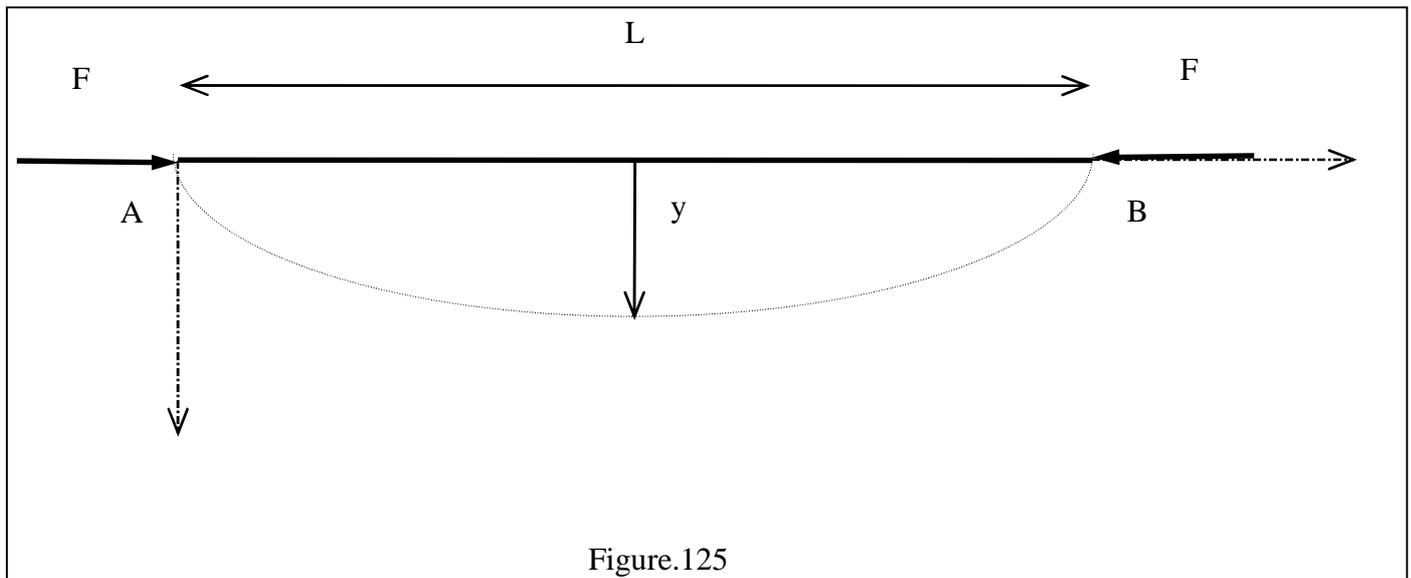
remarque :

généralement, on a une pression intérieure et une pression extérieure, il suffit alors de prendre la différence des pression.

16.FLAMBAGE

1. Mise en évidence du phénomène (charge critique). Figure.125

Prenons pour exemple le cas d'une poutre droite articulée à ses deux extrémités A et B et sollicitée en compression.



Faisons l'hypothèse qu'il existe une petite flèche y de la poutre (début de flambage), on se retrouve en sollicitation composée (compression + flexion). On peut écrire en flexion :

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_{x1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin(2\theta) \\ \varepsilon_{y1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \sin(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \cos(2\theta) \\ \gamma_{x1y1} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin(2\theta) + \gamma_{xy} \cdot \cos(2\theta) \end{array} \right.$$

mais le moment de flexion dépend de la charge F et de la flèche y, à savoir :

$$Mf = -F \cdot y(x)$$

On aboutit alors à l'équation différentielle suivante :

$$E \cdot I_G \cdot y''(x) + F \cdot y(x) = 0$$

Mathématiquement on peut donc trouver des solutions de la forme :

$$y(x) = \alpha \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \quad \text{avec } \alpha \text{ constante (flèche de la section}$$

médiane)

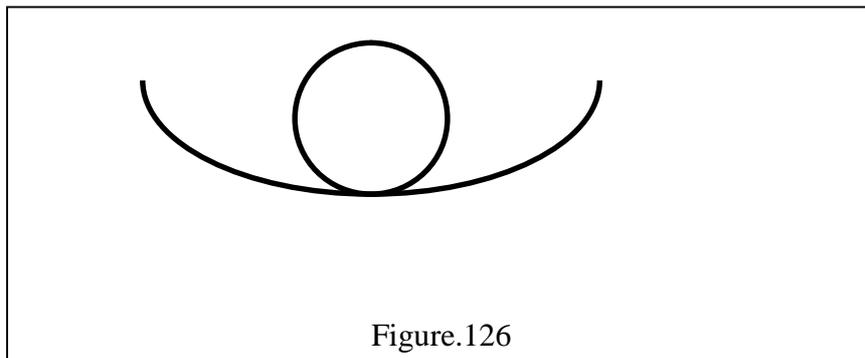
Cette existence de solution confirme notre hypothèse de départ, à savoir, qu'il peut y avoir déformation (flambage) sous certaines charges dites critiques. Celles-ci dépendent de n et y.

On obtient en remplaçant :

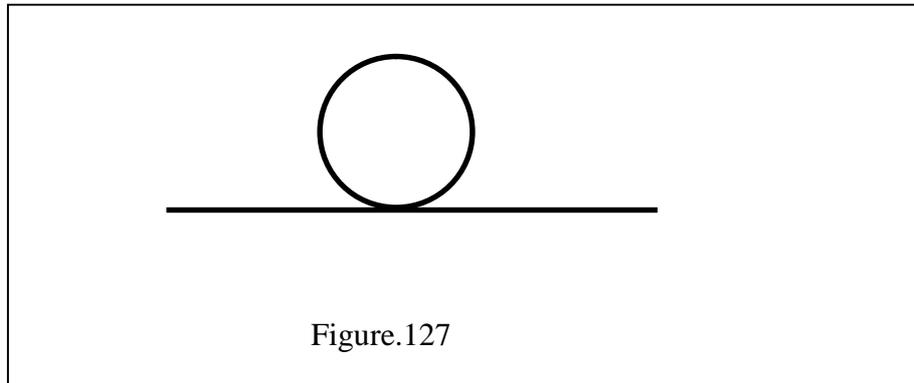
$$F_c = \frac{n \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_G}{L^2} \quad \text{Charge critique d'Euler}$$

Prenons la première de celles-ci (n=1), trois cas sont à envisager :

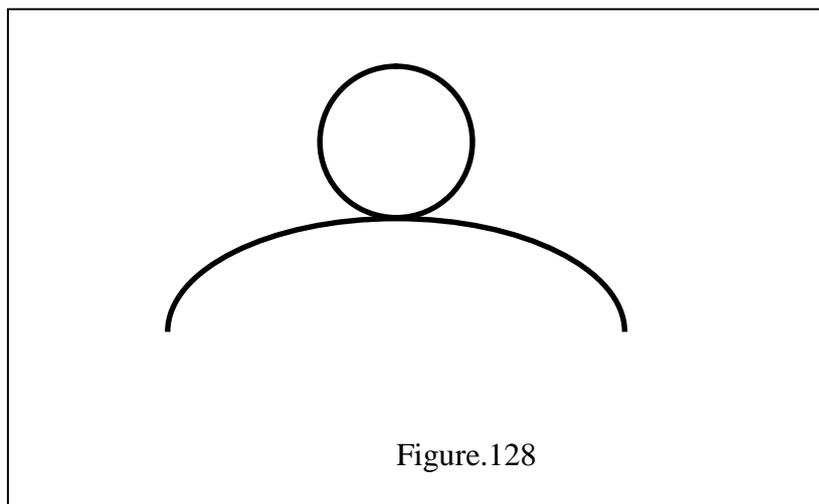
- $F_{\text{réel}} < F_c$: La poutre reste droite, elle travaille en compression. On est en équilibre stable. figure.126



- $F_{\text{réel}} = F_c$: C'est l'incertitude, la poutre peut rester droite ou flamber jusqu'à la valeur α . On est en équilibre neutre. Figure.127



- $F_{\text{réel}} > F_c$: La poutre a de très grandes chances de flamber. On est en équilibre instable. Figure.128



Nous venons d'étudier le cas d'une poutre articulée à ses deux extrémités, on pourrait en faire de même avec d'autres types de liaison aux extrémités (libre, encastrement,...) seul la longueur à prendre en compte demeure alors changée.

2) Contrainte critique.

Nous sommes aussi en compression, on peut donc écrire :

$$\sigma_c = \frac{F_c}{S} = \frac{n \cdot \pi^2 \cdot E \cdot I_G}{S \cdot L^2}$$

On introduit alors le rayon de giration et l'élanement, à savoir :

$$\text{Rayon de giration} \quad r = \sqrt{\frac{I_G}{S}} \quad \text{et} \quad \text{élanement} \quad \lambda = \frac{L}{r}$$

$$\sigma_c = \frac{n \cdot \pi^2 \cdot E \cdot r^2}{L^2}$$

$$\sigma_c = \frac{n \cdot \pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$$

remarque : l'élanement caractérise la flexibilité d'une poutre et permet une comparaison de celles-ci.

3.Méthodes de calcul. (Poutres en Acier)

3.1.Méthode Euler - Rankine.

C'est une méthode de calcul simplifiée valable si l'on n'atteint jamais la 1^{ère} charge critique.

On définit les grandeurs suivantes :

F_{adm} charge admissible

R_{pc} résistance pratique en compression

s coefficient de sécurité

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E}{R_e}} \quad \text{Élanement critique}$$

$$\lambda = \frac{L_e}{r} \quad \text{Élanement (} L_e : \text{longueur effective, dépend du type d'extrémité)}$$

La relation de base est la suivante :

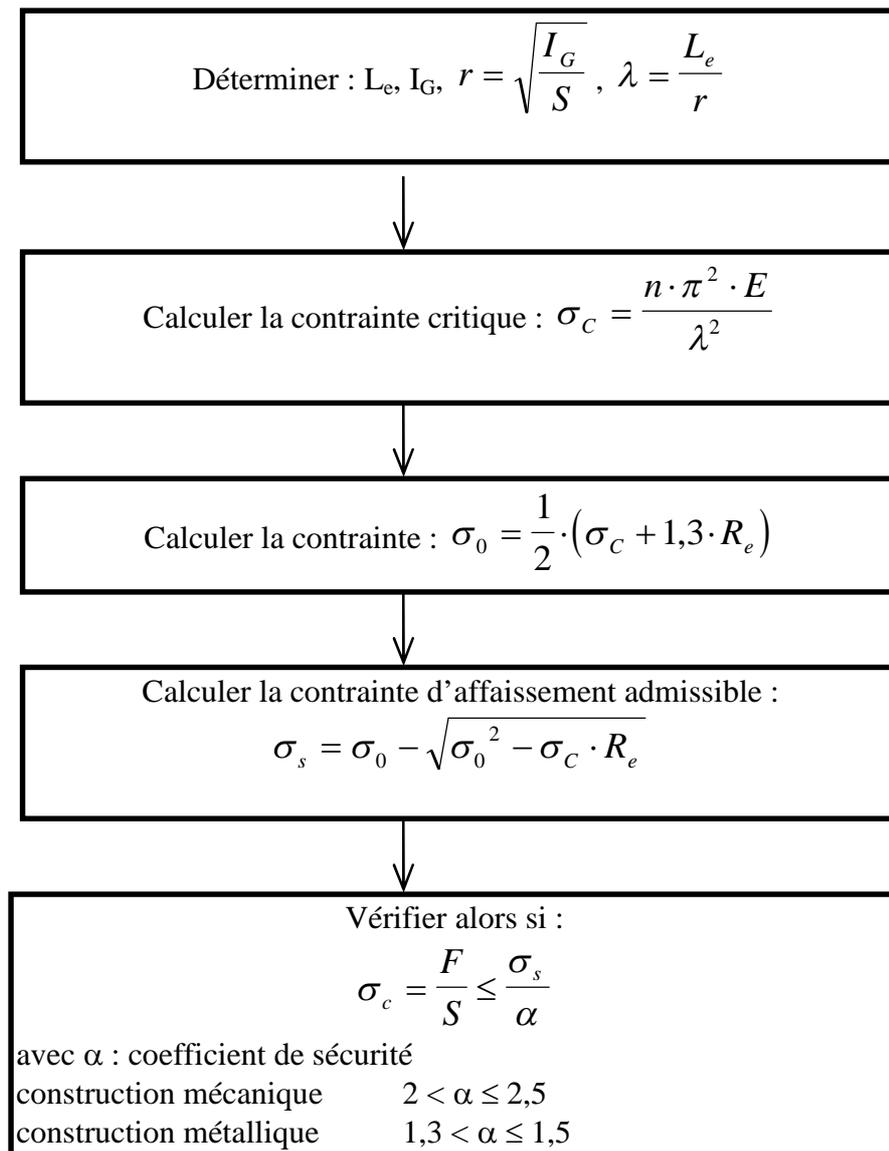
$$2 \cdot s = \frac{F_c}{F_{adm}} = \frac{2 \cdot R_e}{R_{pc}}$$

On travaille ensuite à l'aide du tableau ci-dessous, suivant l'élanement de la poutre.

Poutres Courtes $\lambda < 20$	Poutres Moyennes $20 \leq \lambda \leq 100$	Poutres Longues $\lambda > 100$
calcul en compression	calcul de Rankine	calcul d'Euler
$F_{adm} = R_{pc} \cdot S$	$F_{adm} = \frac{R_{pc} \cdot S}{1 + \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$	$F_{adm} = \frac{R_{pc} \cdot S}{2 \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}$

3.2.Méthode de Duteil.

Cette méthode prend en compte les contraintes de compression dues au moment fléchissant engendré par la flèche f.



Les contraintes en un point de la structure d'un avion fig.129. sont mesurées expérimentalement, à savoir :

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_{x1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin(2\theta) \\ \varepsilon_{y1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \sin(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \cos(2\theta) \\ \gamma_{x1y1} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin(2\theta) + \gamma_{xy} \cdot \cos(2\theta) \end{array} \right.$$

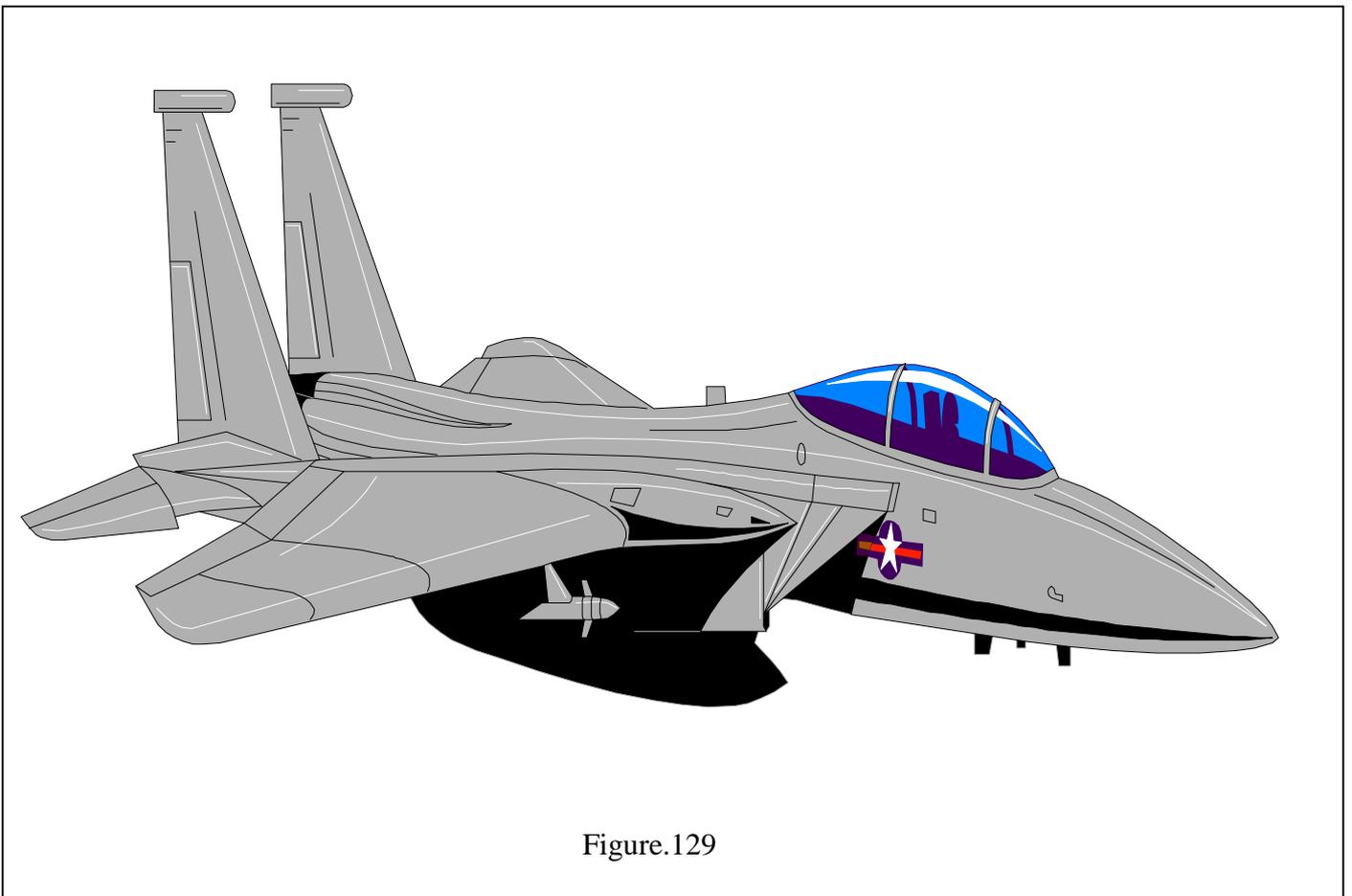


Figure.129

1. Quelle est la valeur des contraintes dans une direction à 45° ?
2. Quelles sont les contraintes principales et la contrainte de cisaillement maximale ?
3. Retrouver ces résultats à l'aide des cercles de Mohr.

17. SYSTEMES HYPERSTATIQUES

On se propose d'aborder différentes méthodes de résolution de systèmes hyperstatiques à l'aide d'exemples.

Exemple n° 1 figure.130

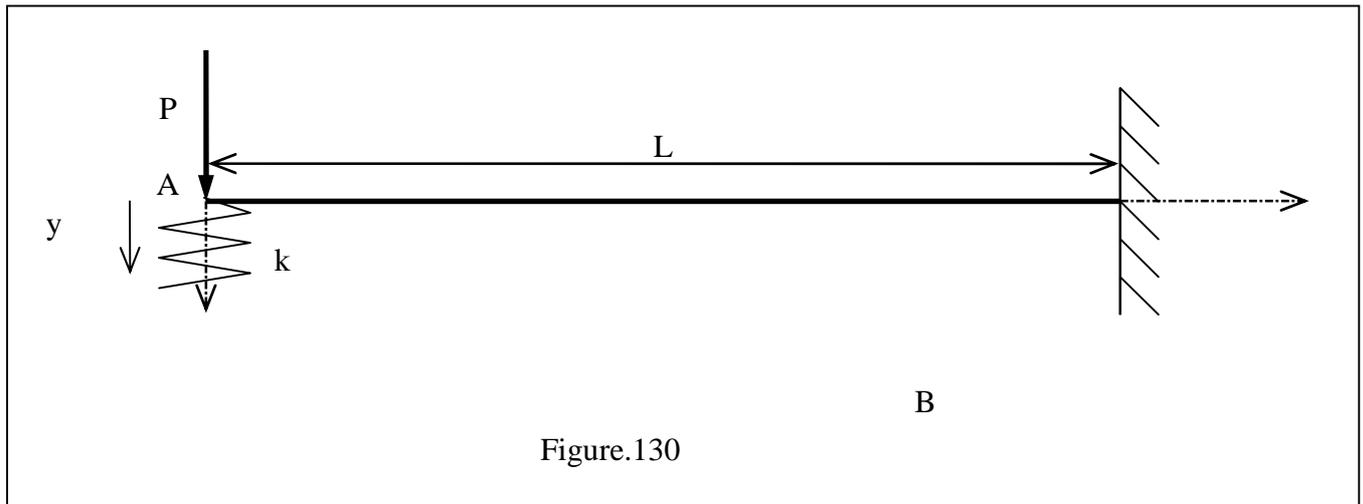


Figure.130

hypothèse : si $P = 0$, le ressort n'est pas chargé.

Si l'on étudie seulement la poutre, on a une poutre encastree soumise à son extrémité à une force $F = P - k \cdot y$

On connaît la déformation à l'extrémité d'une poutre encastree, à savoir :

$$y = \frac{F \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} = \frac{(P - k \cdot y) \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

On peut donc écrire :

$$3 \cdot E \cdot I \cdot y = (P - k \cdot y) \cdot L^3$$

Ce qui nous donne la déformée y :

$$y = \frac{P \cdot L^3}{(3 \cdot E \cdot I + k \cdot L^3)}$$

Exemple n° 2 figure.131

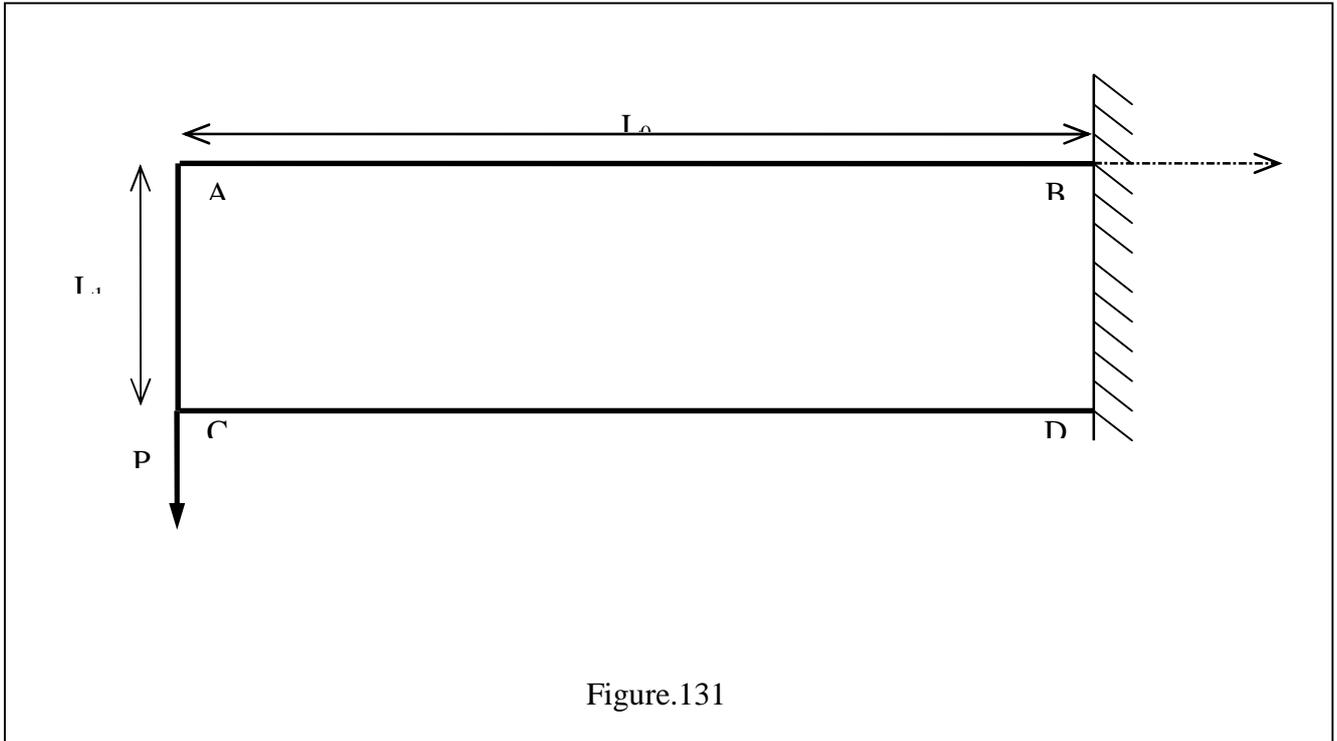


Figure.131

hypothèses : si $P = 0$, la barre AC n'est pas sollicitée. Les 2 barres sont réalisées dans le même matériau.

* tronçon AB. (flexion) figure.132

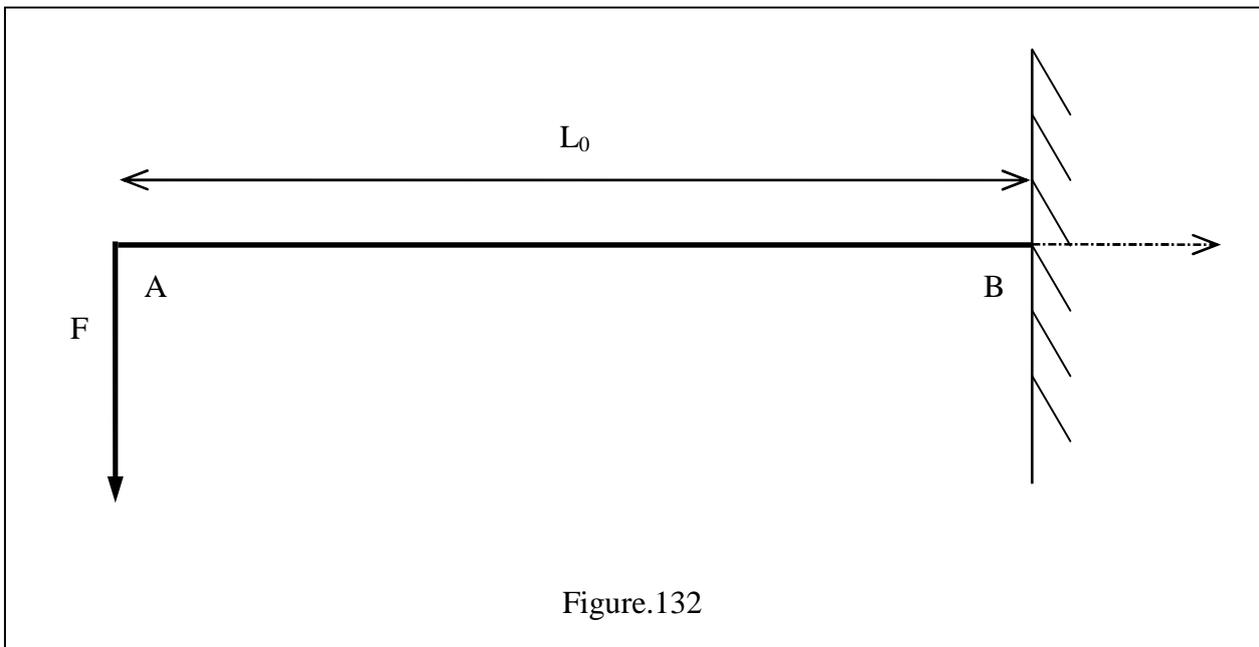


Figure.132

$$y = \frac{F \cdot L_0^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

* tronçon CD. (flexion) figure.133

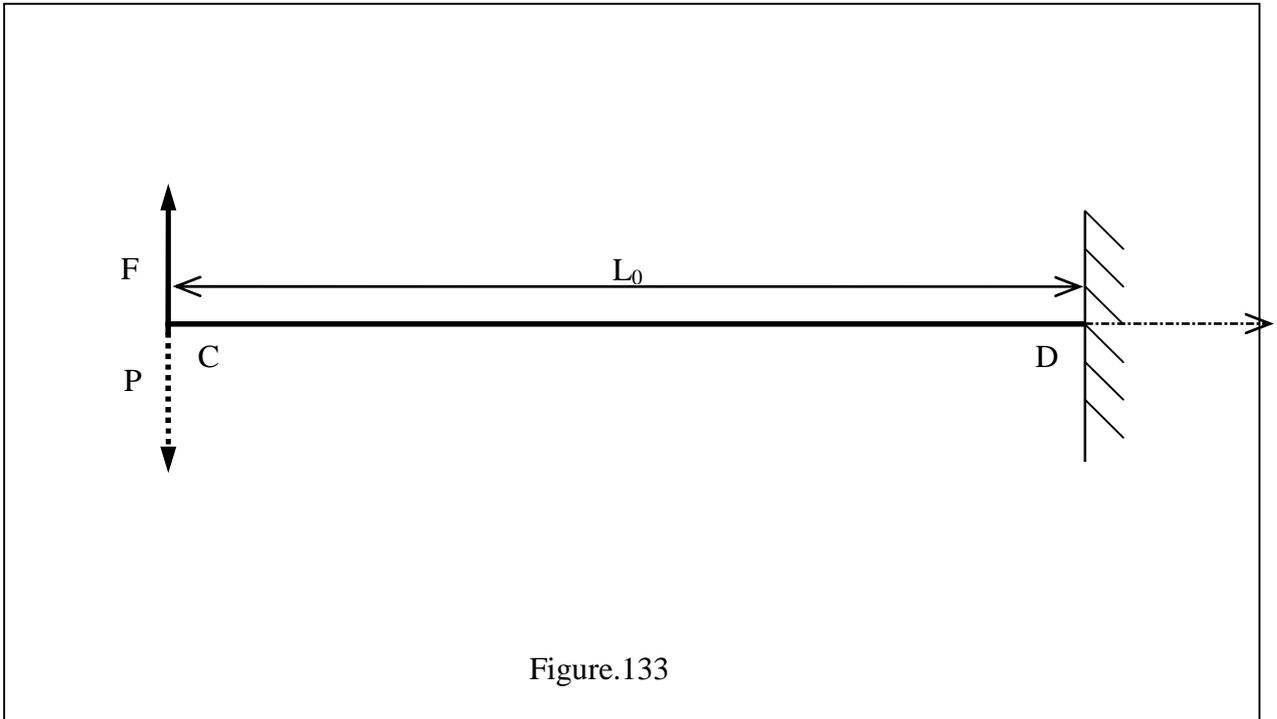


Figure.133

$$y' = \frac{(P - F) \cdot L_0^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

* tronçon AC. (extension)

$$\frac{F}{S} = E \cdot \frac{(y' - y)}{L_1}$$

En combinant les trois relations, on arrive au système :

$$\begin{cases} y' - y = \frac{F \cdot L_1}{E \cdot S} \\ y' - y = \frac{(P - F) \cdot L_0^3}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{F \cdot L_0^3}{3 \cdot E \cdot I} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{F \cdot L_1}{E \cdot S} = \frac{(P - 2 \cdot F) \cdot L_0^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

$$\Rightarrow F \cdot \left(\frac{L_1}{S} + \frac{2 \cdot L_0^3}{3 \cdot E \cdot I} \right) = \frac{P \cdot L_0^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

soit
$$F = \frac{P \cdot L_0^3 \cdot S}{(3 \cdot E \cdot I \cdot L_1 + 2 \cdot L_0^3 \cdot S)}$$

Connaissant F, il est alors facile de trouver y et y'

Exemple n° 3 Figure.134

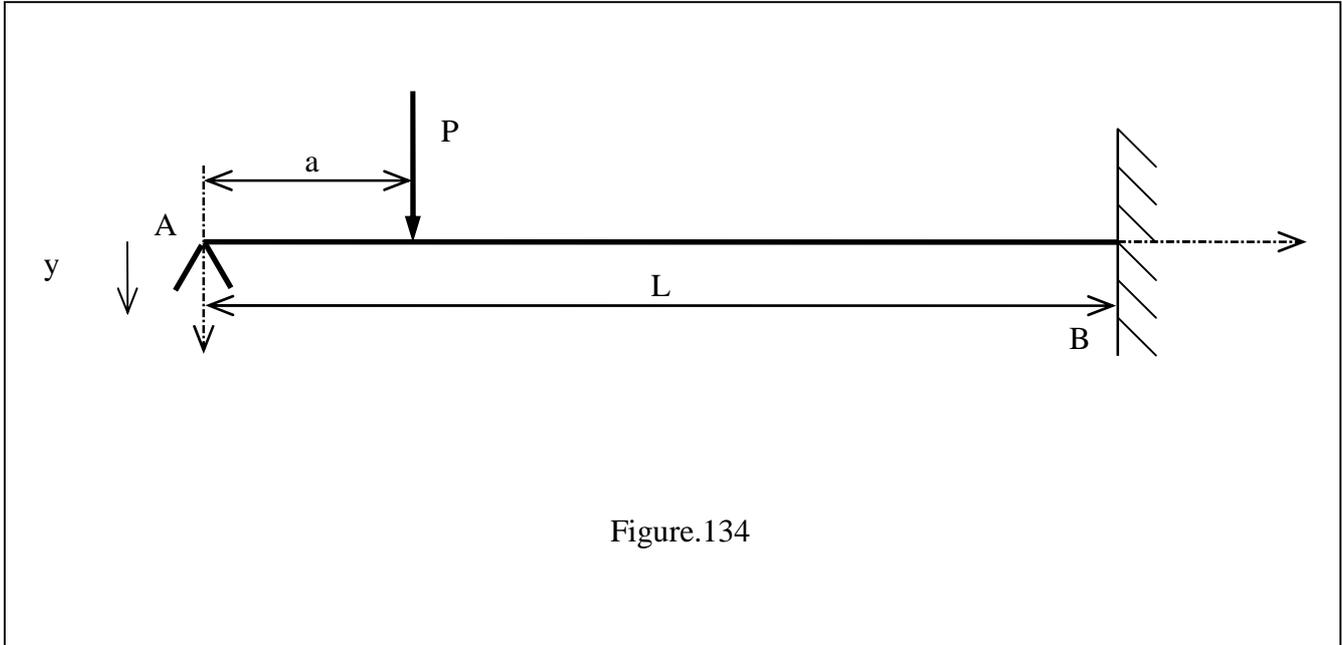


Figure.134

Si l'on applique le P.F.S. on aboutit aux équations :

$$\begin{cases} P + A_y + B_y = 0 \\ M_B + L \cdot A_y - (L - a) \cdot P = 0 \end{cases}$$

On se retrouve avec 2 équations et 3 inconnues (A_y , B_y et M_B).

On décompose la poutre en 2 sous-systèmes, de la manière suivante : figure.135

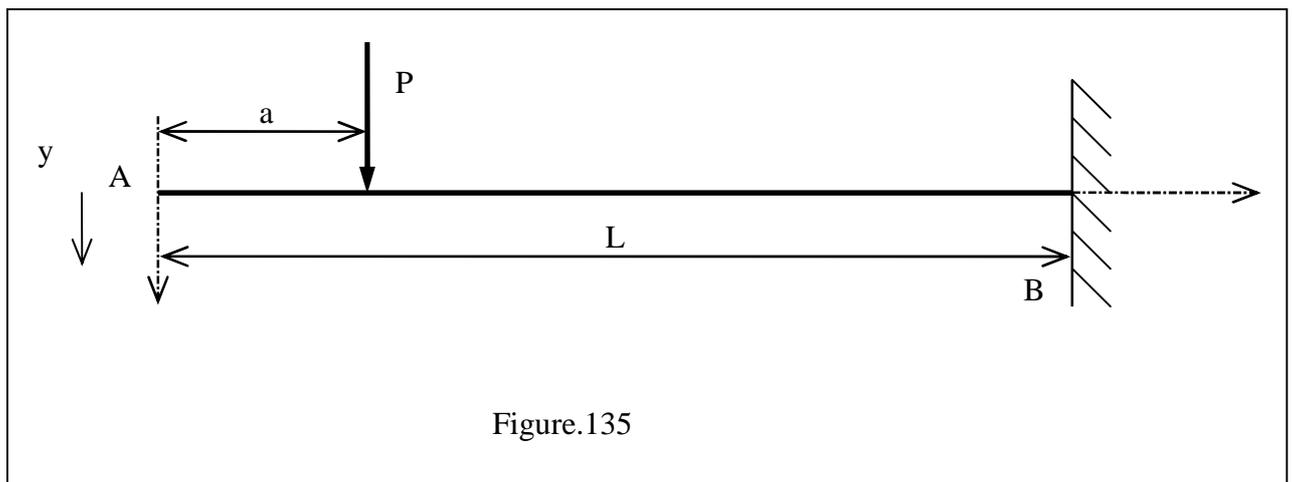
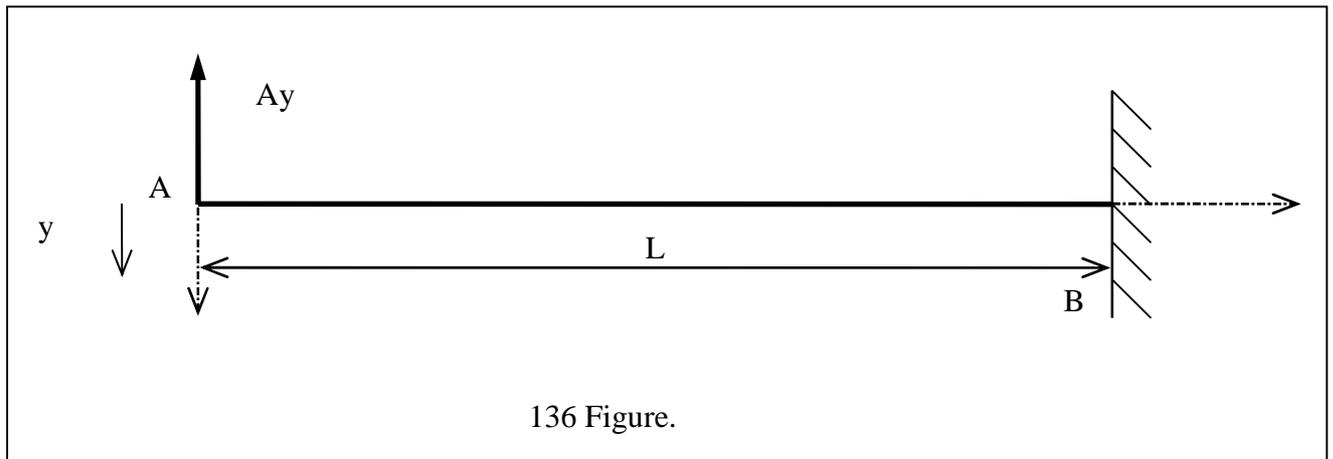


Figure.135

La flèche en A est alors : $y_{A1} = \frac{P \cdot (L - a)^2 \cdot (2 \cdot L + a)}{6 \cdot E \cdot I}$



la flèche en A est alors : $y_{A2} = \frac{Ay \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I}$

Si l'on fait la superposition des deux états précédents, on doit aboutir à une flèche nulle en A car il y a un appui simple en A. On doit donc avoir : $y_{A1} = y_{A2}$

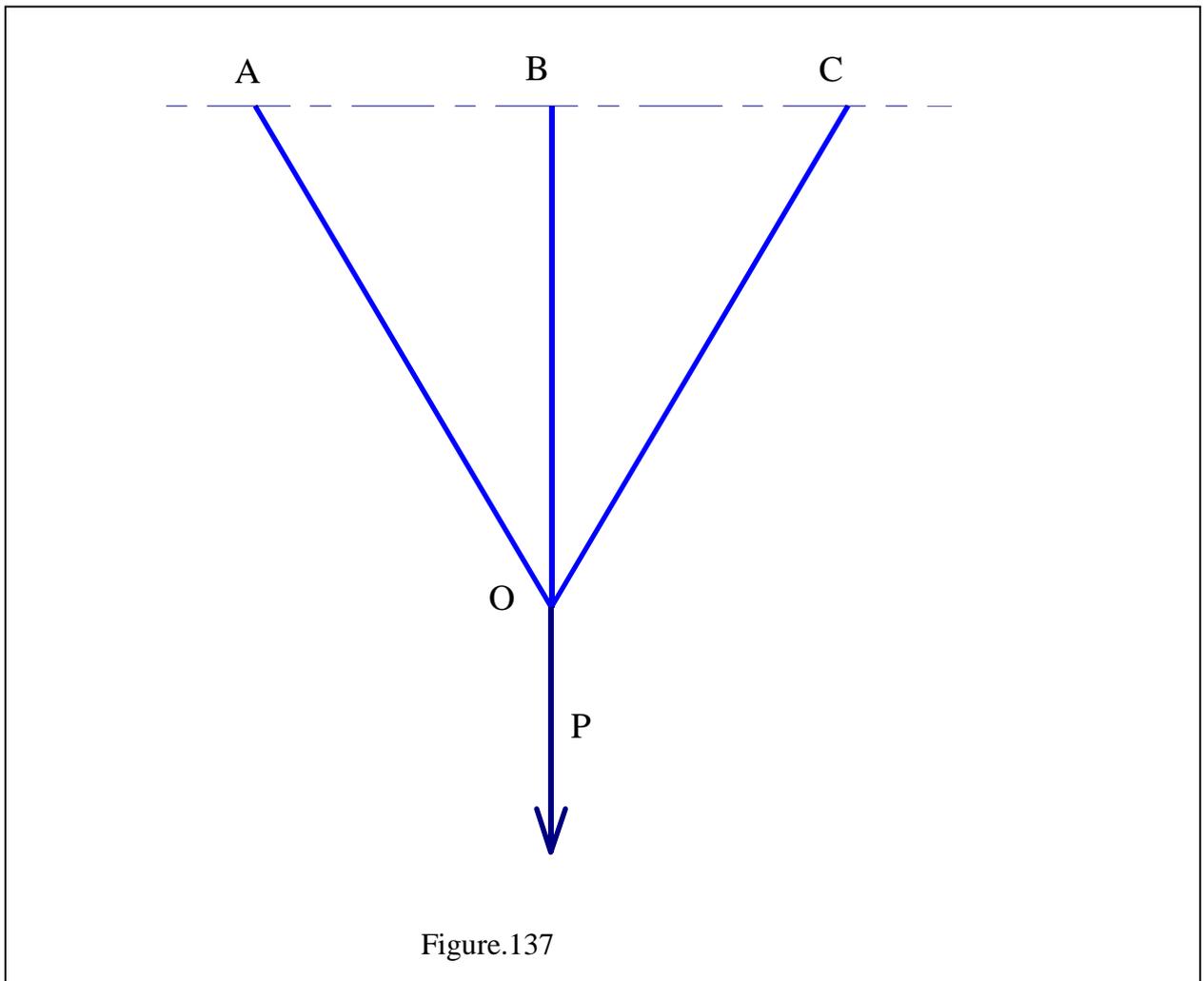
Ce qui donne après calcul

$$Ay = \frac{P \cdot (L - a)^2 \cdot (2 \cdot L + a)}{2 \cdot L^3}$$

1/Trois barres de même section S, construites dans le même matériau de module de Young E sont suspendues à un bâti supposé indéformable.

Hypothèses :

- ◆ les liaisons en A, B, C et O sont des liaisons pivot parfaites d'axe Z.
- ◆ la masse des barres est négligée. leurs longueurs respectives sont L_1, L_2, L_3 . les angle(AOB) et (BOC) valent α .
- ◆ En O, on suspend une masse de poids P. N_1, N_2 et N_3 représentent les efforts normaux dans les barres.



- 1) Etudier l'équilibre de l'axe O et montrer que le système est hyperstatique.
- 2) Exprimer la relation entre les allongements des trois barres. ($\Delta\alpha$ petit)
- 3) Exprimer les efforts normaux dans les barres.
- 4) On donne $S = 100 \text{ mm}^2$, $P = 6000 \text{ N}$, $\alpha = 30^\circ$, calculer les contraintes d'extension dans les trois barres

2/ Un fil en acier de longueur $L = AB$ et de section S est lié en A et en B à deux pièces fixes par deux liaisons pivot parfaites. On suspend au milieu I du fil une masse de poids P et le fil prend la configuration élastique AL'B. Figure.138

Soit E , le module de Young E de l'acier constituant le fil.

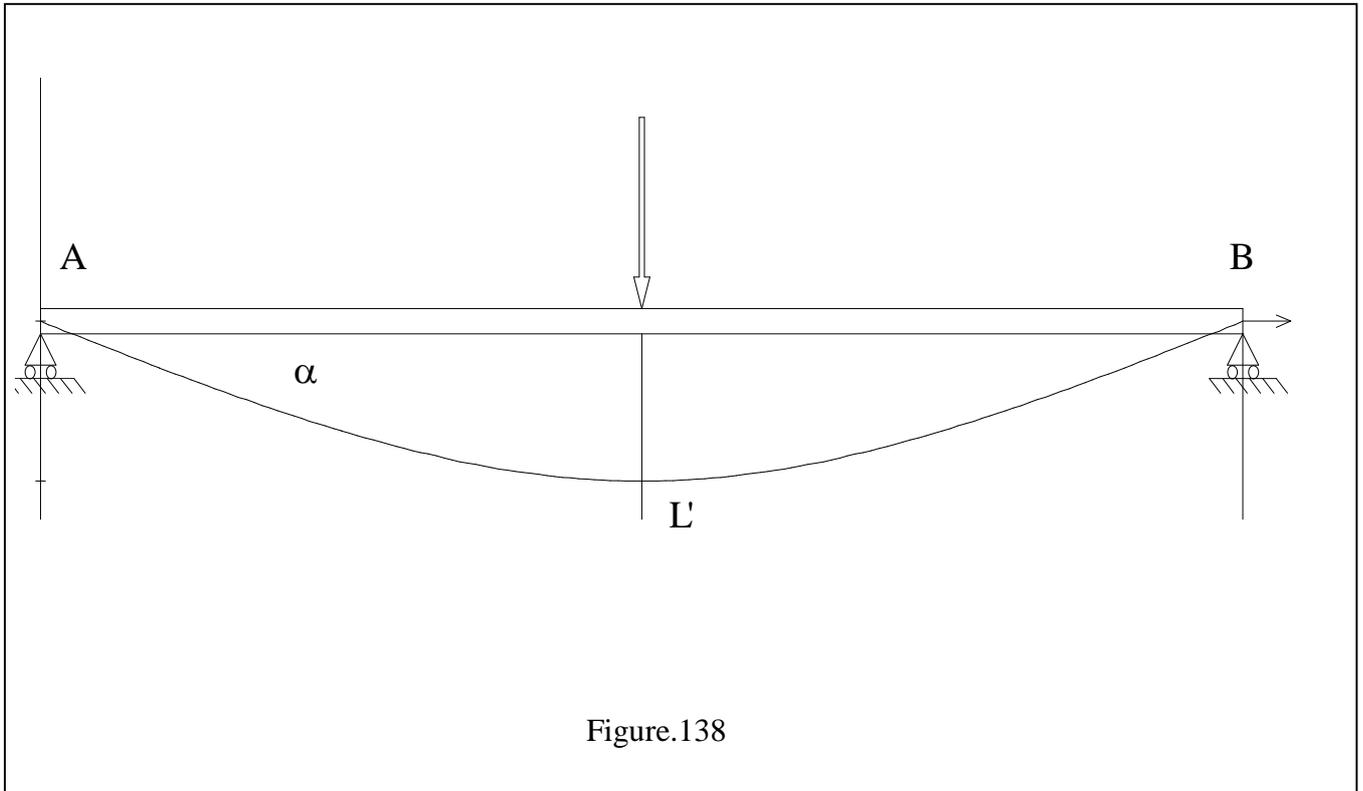


Figure.138

Hypothèse :

◆ les déformations sont supposées petite, on pourra écrire : $\tan \alpha \approx \alpha$

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

- 1) Exprimer l'effort normal d'extension dans le fil en fonction de P et α .
- 2) Exprimer l'allongement relatif du fil en fonction de α .
- 3) Exprimer l'allongement relatif du fil en fonction de l'effort normal.
- 4) Dans le résultat de la question 2, on peut négliger α^2 par rapport à 2.
Exprimer la déformée en L' en fonction de P .
- 5) On donne $S = 4,9 \text{ mm}^2$, $P = 200 \text{ N}$, $L = 320 \text{ mm}$, $E = 2.10^5 \text{ MPa}$.
Faire les différentes applications numériques

18. Ressorts Hélicoïdaux à fil rond

1) Caractéristiques.

Les principales caractéristiques d'un ressort hélicoïdal à fil rond sont : figure.139

- ◆ le diamètre d'enroulement moyen D
- ◆ le diamètre de spire d
- ◆ la hauteur utile à vide H₀
- ◆ le nombre de spires n

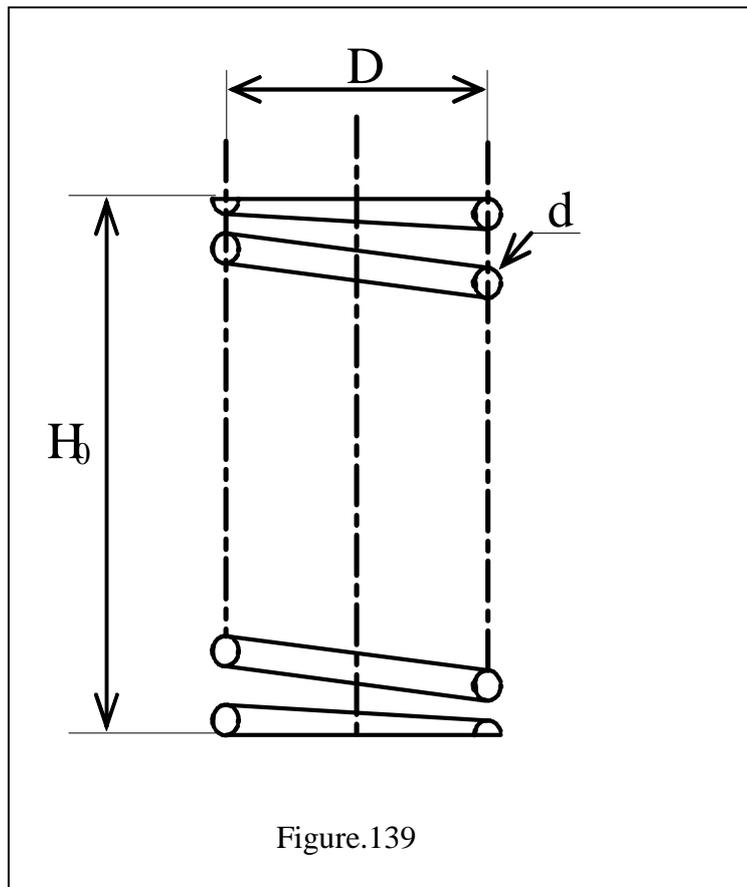


Figure.139

2) Rigidité.

Si l'on se place dans la zone de comportement élastique du ressort, on a proportionnalité entre la charge axiale P et la flèche $f = H_0 - H$.

$$P = k \cdot f = k \cdot (H_0 - H)$$

k est la raideur du ressort.

3) Sollicitations.

Le ressort est soumis à deux actions mécaniques portées par son axe, à savoir :

- $\{ext \rightarrow E1\}_A = \{\vec{P} \quad \vec{0}\}_A$
- $\{ext \rightarrow E2\}_{A'} = \{-\vec{P} \quad \vec{0}\}_{A'}$

Les résultantes sont portées par l'axe y_0 . figure.140

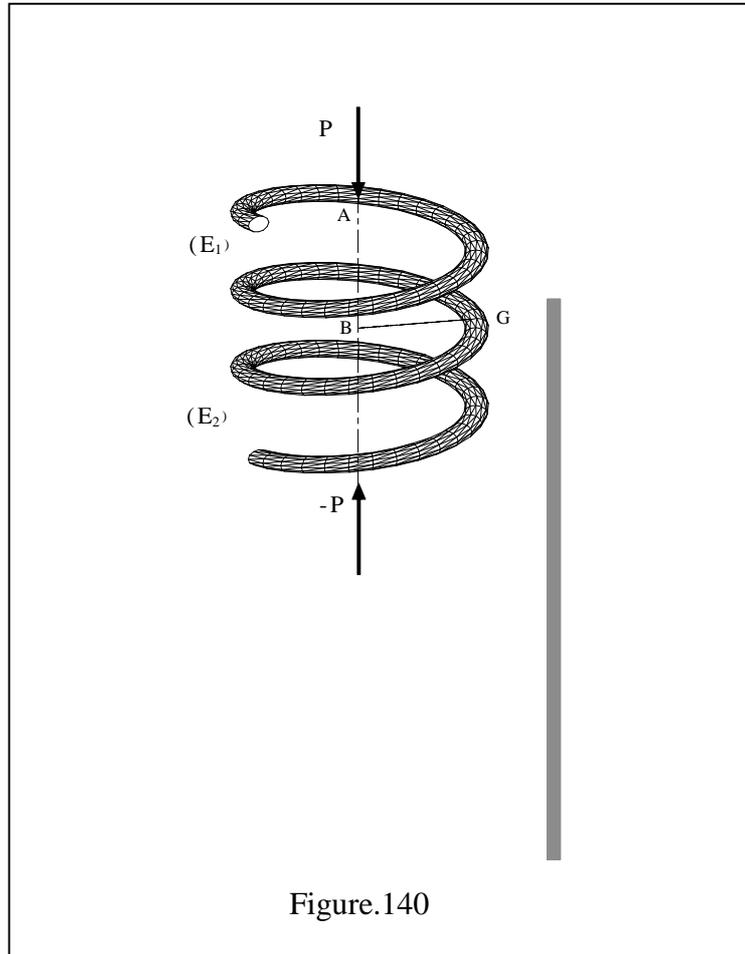


Figure.140

L'on réalise une coupure en G du ressort, on observe sur une vue de profil (ci-contre) un changement d'axes.

Par définition, on obtient le torseur de cohésion par la relation :

$$\{coh\}_G = \{ext \rightarrow E2\}_G$$

On a donc :

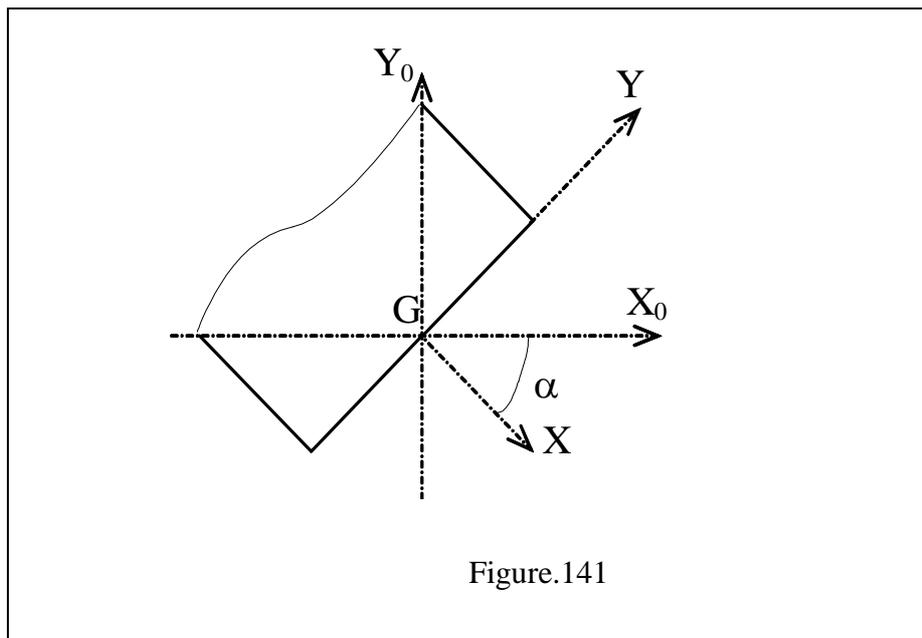
$$\{coh\}_{A'} = \left\{ \begin{array}{cc} -P \cdot \sin \alpha & 0 \\ P \cdot \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{A'}$$

Il suffit alors de faire un transport, en remarquant que $GA' = GB + BA'$, soit :

$$\{coh\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} -P \cdot \sin \alpha & -\frac{P \cdot D}{2} \cdot \cos \alpha \\ P \cdot \cos \alpha & \frac{P \cdot D}{2} \cdot \sin \alpha \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_G$$

On a donc les sollicitations suivantes :

- Effort normal $N = -P \cdot \sin \alpha \Rightarrow$ COMPRESSION
- Effort tranchant $T_y = P \cdot \cos \alpha \Rightarrow$ CISAILLEMENT
- Moment de torsion $M_t = -\frac{P \cdot D}{2} \cdot \cos \alpha \Rightarrow$ TORSION
- Moment de flexion $M_{fy} = \frac{P \cdot D}{2} \cdot \sin \alpha \Rightarrow$ FLEXION



Comparaison des contraintes :

En pratique α est très petit (6 à 8°), par conséquent $\sin \alpha$ est proche de 0. Les sollicitations de compression et de flexion sont négligeables par rapport aux autres sollicitations.

Exprimons maintenant la contrainte de cisaillement :

$$T_{\text{cisaillement}} = \frac{T_y}{S_{\text{cisailée}}} = \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot d^2} \cdot \cos \alpha \approx \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot d^2}$$

Exprimons ensuite la contrainte de torsion :

$$T_{torsion} = \frac{Mt}{\left(\frac{I_0}{\rho}\right)} = \frac{P \cdot D}{2} \cdot \frac{32}{\pi \cdot d^4} \cdot \frac{d}{2} \cdot \cos \alpha \approx \frac{8 \cdot P \cdot D}{\pi \cdot d^3}$$

Si l'on considère que $D \approx 6 \cdot d$, on trouve une contrainte de torsion de : $T_{torsion} \approx \frac{48 \cdot P}{\pi \cdot d^2}$

On constate alors que : $T_{torsion} \approx 12 \cdot T_{cisaillement}$

Un ressort hélicoïdal à fil rond est essentiellement sollicité en TORSION.

4) Condition de résistance.

La condition de résistance en torsion reste inchangée, à savoir :

$$T_{\max i} \leq \frac{T_{pratique}}{S}$$

$$T_{ultime} \leq T_{elastique}$$

On peut aussi ajouter une condition de résistance spires jointives :

Pour un acier chrome-vanadium à ressort, on a :

$$G = 82 \cdot 10^3 \text{ MPa}$$

$$T_e = 560 \text{ MPa}$$

$$T_p = 300 \text{ MPa}$$

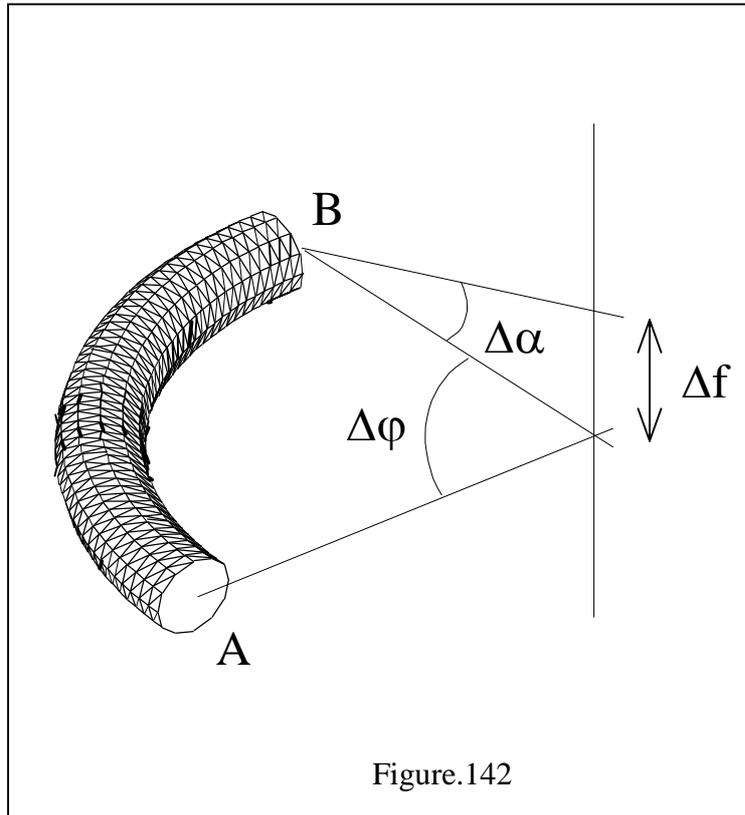
5) Etude des déformations.

Isolons un tronçon de ressort de longueur Δl . Sur cette longueur le ressort peut être assimilé à une poutre AB soumise au moment de torsion : figure.142

D'après les relations de déformation, on a :

$$Mt = G \cdot \theta \cdot I_0$$

avec : $\theta = \frac{\Delta \alpha}{\Delta l}$



A l'aide de la figure précédente, on peut établir que :

$$\Delta f = \frac{D}{2} \cdot \sin(\Delta\alpha) \approx \frac{D}{2} \cdot \Delta\alpha \approx \frac{D}{2} \cdot \theta \cdot \Delta\ell \approx \frac{D}{2} \cdot \frac{P \cdot D}{2 \cdot G \cdot I_0} \cdot \Delta\ell \approx \frac{8 \cdot P \cdot D^2}{\pi \cdot G \cdot d^4} \cdot \Delta\ell$$

La flèche totale f est obtenue en sommant les flèches élémentaires Δf , soit :

$$f = \sum \Delta f \approx \frac{8 \cdot P \cdot D^2}{\pi \cdot G \cdot d^4} \cdot \sum \Delta\ell$$

Mais on peut faire intervenir la longueur du ressort $L \approx \pi \cdot n \cdot D$, soit :

$$f \approx \frac{8 \cdot P \cdot D^3 \cdot n}{G \cdot d^4}$$

On peut alors retrouver la rigidité connaissant la charge.

$$k \approx \frac{G \cdot d^4}{8 \cdot D^3 \cdot n}$$

6) Conseil de calcul.

Le nombre de paramètres de définition de ce type de ressort est de 4 : D , d , n , H_0 .

On dispose de 3 équations, à savoir :

- Condition de résistance.
- Condition de résistance spires jointives.
- Relation de déformation => flèche ou raideur.

Une condition d'encombrement, de proportion est donc nécessaire.

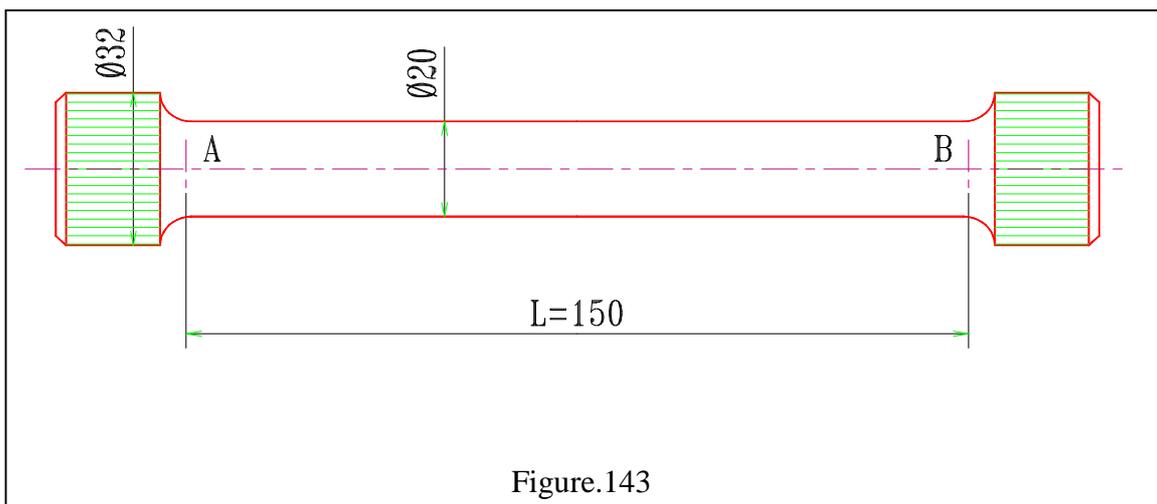
Exercice n° 1 : TORSION

On considère un arbre dont la forme est cylindrique entre les sections A et B. Un calcul préliminaire a permis de déterminer le moment de torsion entre les sections A et B, à savoir $M_T = 50 \text{ Nm}$. Cet arbre est en acier pour lequel $G = 8.10^4 \text{ MPa}$ et $\tau_p = 180 \text{ MPa}$. On adopte un coefficient de sécurité de 3. De plus, on s'impose une valeur limite pour l'angle unitaire de torsion $\theta_{lim} = 0,25 \text{ }^\circ/\text{m}$.

- 1.1) Déterminer de manière littérale le diamètre minimal de l'arbre pour vérifier la condition de résistance.
- 1.2) Déterminer de manière littérale le diamètre minimal de l'arbre pour vérifier la condition de déformation (rigidité).
- 1.3) Faire les applications numériques. Conclusion.

Exercice n° 2 :

La figure 143 ci-dessous représente une barre de torsion de suspension



Cette barre est en acier spécial de caractéristiques : $G = 8.10^4$ MPa et $\tau_p = 500$ MPa..On adopte un coefficient de sécurité de 2.La variation de section en A et B provoque une concentration de contrainte. ($k = 2$).

La condition de déformation impose :

2.1. Déterminer de manière littérale le moment de torsion maximal que peut supporter la barre pour vérifier la condition de résistance.

2.2. Déterminer de manière littérale le moment de torsion maximal que peut supporter la barre pour vérifier

Condition de déformation (rigidité).

2.3. Faire les applications numériques. Conclusion.

Exercice n° 3 :

On considère un arbre de forme cylindrique. Son diamètre est $d = 30$ mm entre les sections A et B. Un calcul préliminaire a permis de déterminer le moment de torsion entre ces sections, à savoir $M_T = 50$ Nm. Cet arbre est en acier pour lequel $G = 8.10^4$ MPa.

3.1. Calculer l'angle unitaire de torsion en $^\circ/m$.

3.2. Calculer la contrainte tangentielle maximale.

3.3. Pour alléger l'arbre, on remplace cet arbre plein par un arbre creux de diamètre intérieur $d = 30$ mm et de Diamètre extérieur D. En conservant la même contrainte tangentielle, établir une relation permettant de calculer D.

3.4. Résoudre cette équation par une méthode numérique de votre choix.

(on pourra poser $D = \lambda.d$ et calculer λ)

3.5) Calculer le gain de masse qu'apporte cette modification.

3.6) Calculer l'angle unitaire de torsion de l'arbre creux en $^\circ/m$. Conclusion.

Exercice n° 4 :

On considère un arbre cylindrique creux. Son diamètre intérieur est imposé par les côtes d'encombrements du ressort qu'il doit contenir ($d = 30$ mm). Sa longueur utile entre les sections A et B est $L = 200$ mm.Les caractéristiques de l'acier qui le compose sont : $G = 8.10^4$ MPa et $\tau_p = 128$ MPa..Cet arbre doit pouvoir transmettre un couple de 60 Nm.On s'impose un coefficient de sécurité de 4.

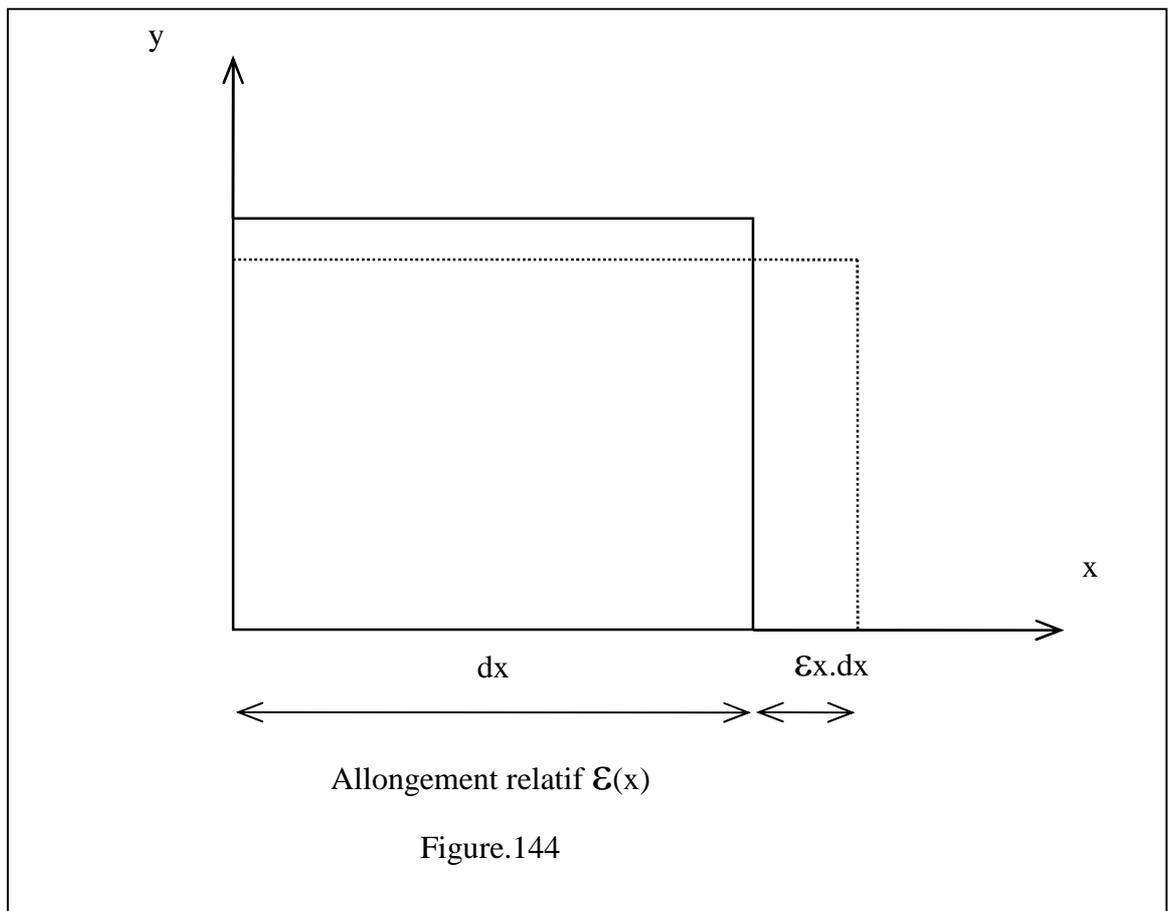
- 4.1. Déterminer l'expression littérale, puis numérique, du module de torsion (I_0 / ρ) de cet arbre.
- 4.2. Etablir une relation permettant de calculer le diamètre extérieur D.
- 4.3. Résoudre cette équation par une méthode numérique de votre choix
(on pourra poser $D = \lambda \cdot d$ et calculer λ)
- 4.4. Déterminer l'expression littérale, puis numérique, de l'angle α exprimé en degrés dont tournent les sections A et B l'une par rapport à l'autre si $D = 33$ mm.

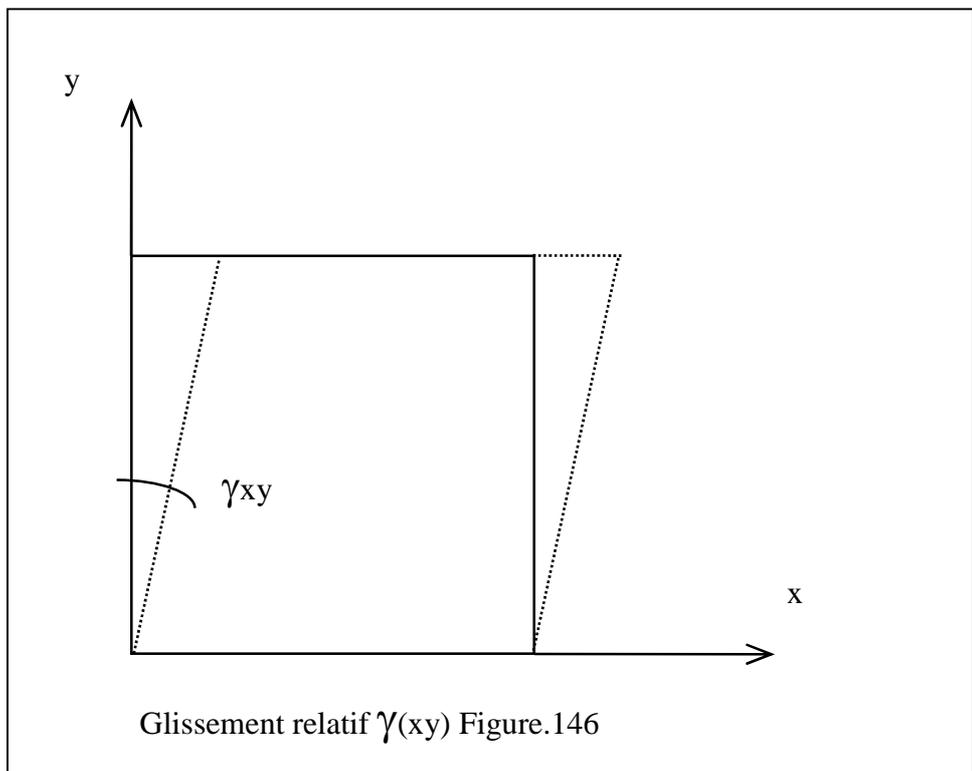
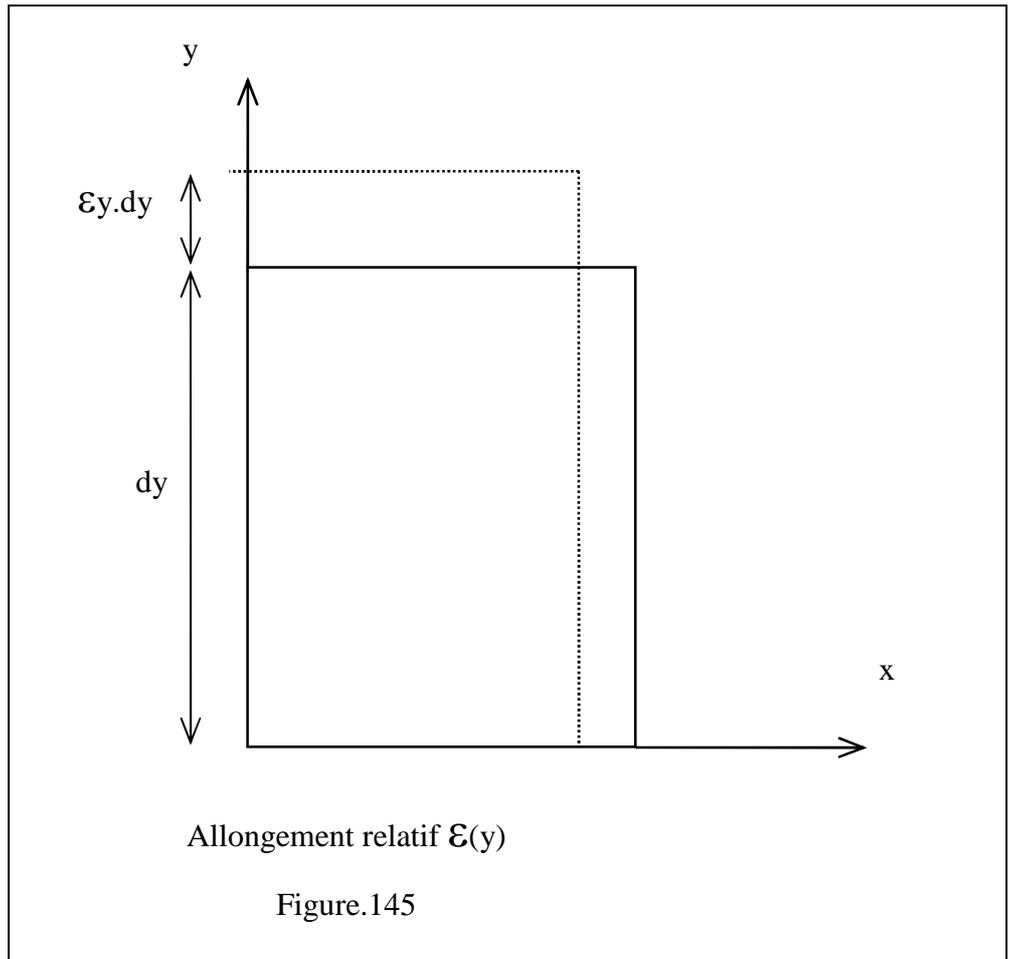
19. DEFORMATION PLANE

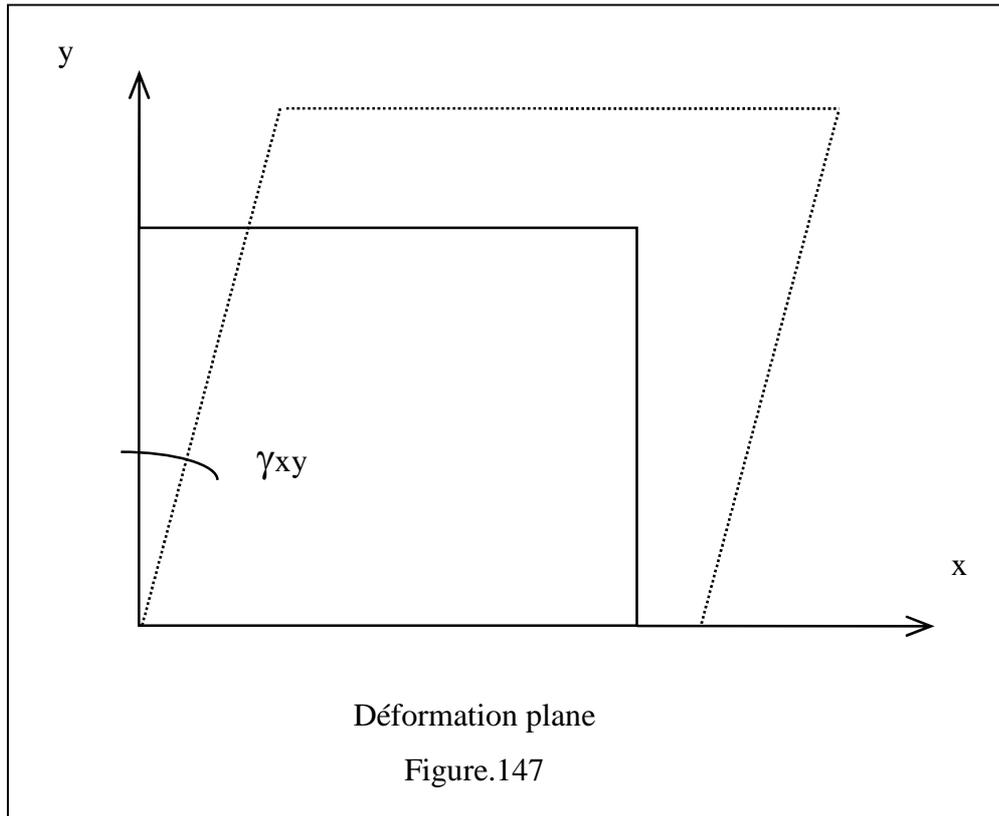
Tout comme pour les principales sollicitations étudiées précédemment (traction, cisaillement, torsion,...) il est très utile de connaître l'évolution des déformations. Figure.144 et figure.145 En déformation plane, on rencontre 3 types de déformation, à savoir : $\epsilon(x)$, $\epsilon(y)$ et $\gamma(xy)$

Par exemple, une contrainte suivant x provoque une déformation sur x mais aussi une déformation sur y pour respecter la conservation de la matière.

On retrouve alors le coefficient de Poisson : $\epsilon_y = -\nu \cdot \epsilon_x$







1. Déformation dans une section inclinée.

Etudions l'évolution des déformations lorsque le cube de référence pivote d'un angle θ autour de z . On a simplement un changement de repère à réaliser.

On peut établir les relations :

$$\left[\begin{array}{l} \varepsilon_{x1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \cos(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \sin(2\theta) \\ \varepsilon_{y1} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} - \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2} \cdot \sin(2\theta) + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot \cos(2\theta) \\ \gamma_{x1y1} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y) \cdot \sin(2\theta) + \gamma_{xy} \cdot \cos(2\theta) \end{array} \right.$$

remarque : on retrouve comme pour les contraintes $\varepsilon_{x1} + \varepsilon_{y1} = \varepsilon_x + \varepsilon_y$

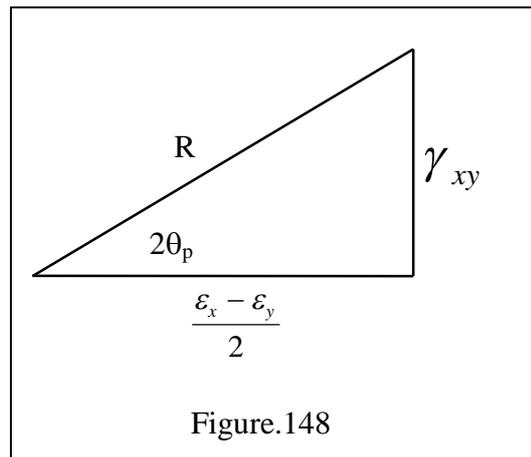
2. Déformations principales et Glissement maximal.

Comme pour les contraintes planes, il existe une direction θ_p pour laquelle $\gamma(xy) = 0$ et les déformations sont extrêmes $\epsilon_{\max i}$ et $\epsilon_{\min i}$.

* Déformations principales :

Par une démarche analogue aux contraintes, on aboutit à la relation :

$$\tan(2\theta_p) = \frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_x - \epsilon_y}$$



Posons alors :

$$R = \sqrt{\left(\frac{\epsilon_x - \epsilon_y}{2}\right)^2 + \gamma_{xy}^2}$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned}\epsilon_{\max i} &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} + R = \epsilon_{\text{moyen}} + R \\ \epsilon_{\min i} &= \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2} - R = \epsilon_{\text{moyen}} - R\end{aligned}$$

remarque : les relations précédentes ne sont valables que si les matériaux sont isotropes.

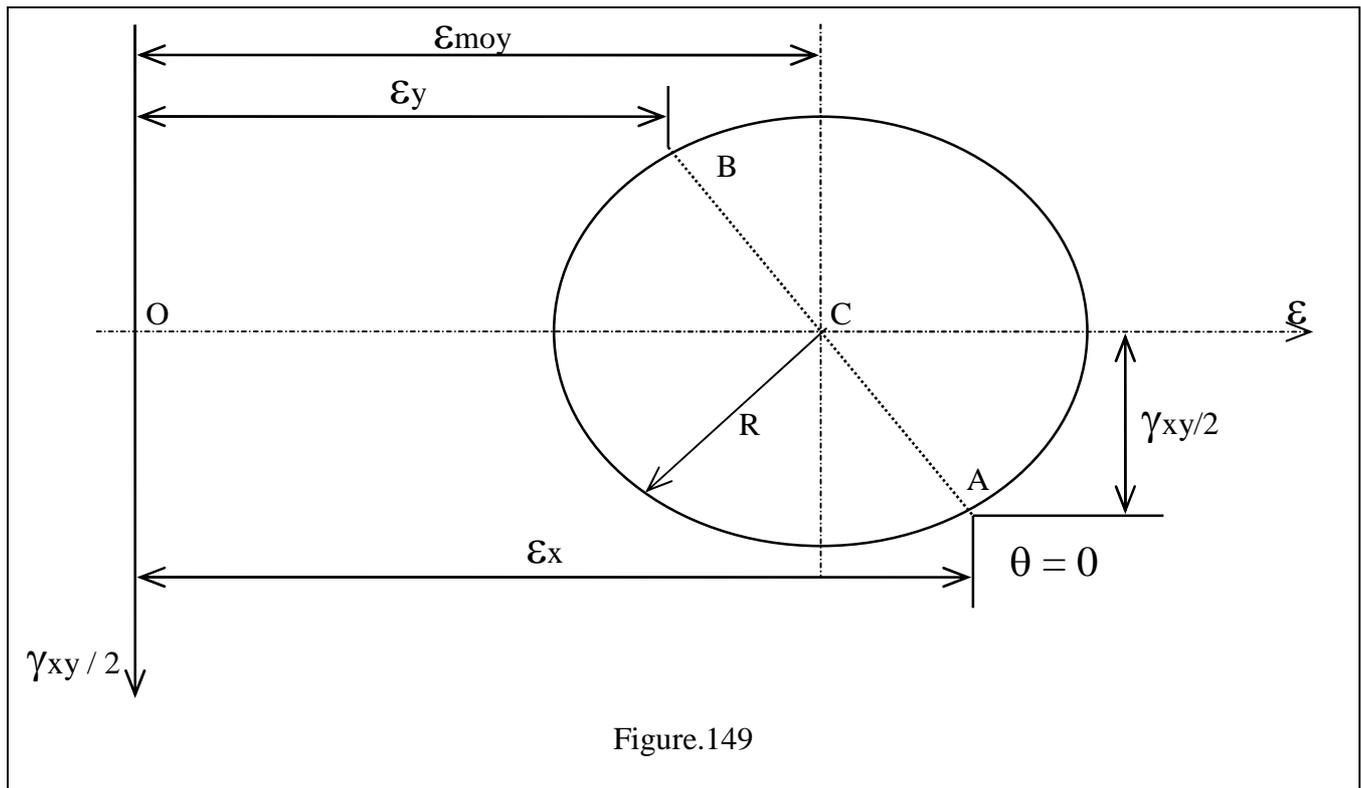
* Glissement maximal :

On peut aussi rechercher le glissement maximal, obtenu pour : $\theta_c = \theta_p \pm 45^\circ$

Ce qui nous donne : $\gamma_{\max} = 2 \cdot R$

3) Cercles de Mohr.(pour déformations planes)

On peut représenter les déformations à l'aide d'un cercle de Mohr figure.149



Méthode de tracé

a) les axes : ϵ en abscisse (>0 vers la droite) et $\gamma / 2$ en ordonnée (>0 vers le bas) prendre une échelle de déformation.

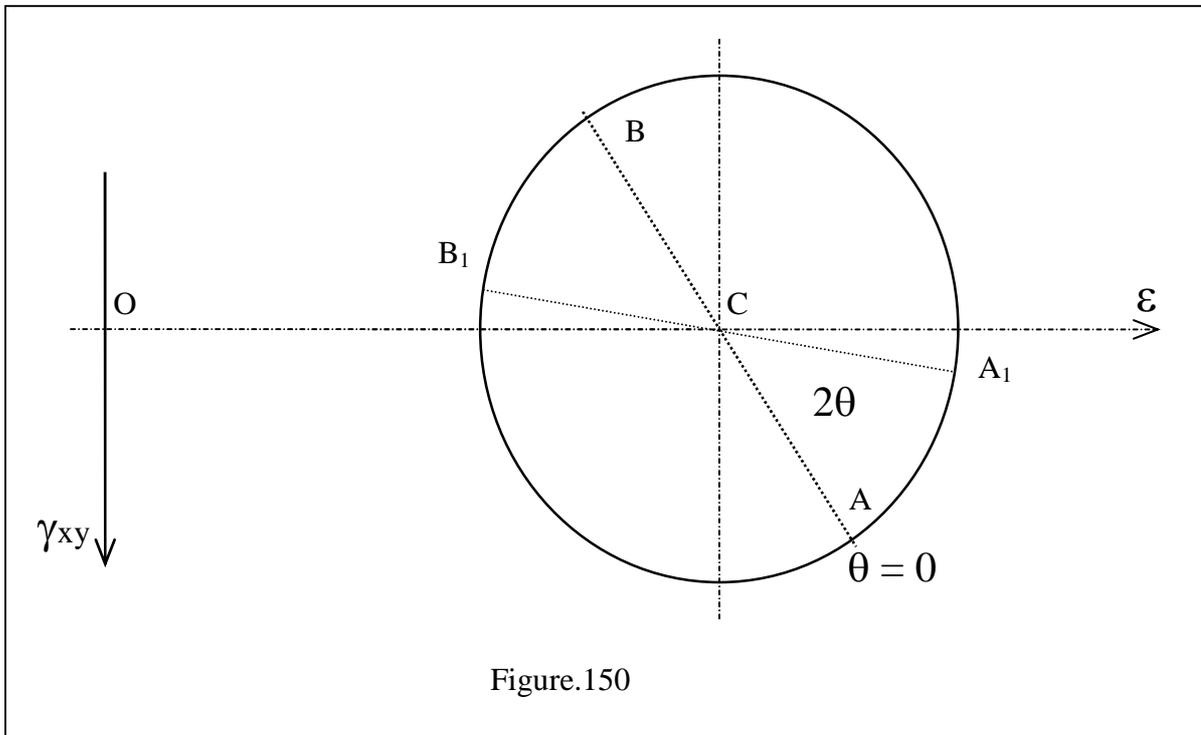
b) le centre C situé à la distance $\epsilon_{moyen} = \frac{\epsilon_x + \epsilon_y}{2}$ de O.

c) le point A de coordonnées $(\epsilon_x ; \gamma_{xy} / 2)$.

d) le cercle de centre C et de rayon AC.

Recherche des déformations dans une direction x_1 inclinée de θ figure.150

Le diamètre AB sert de référence angulaire ($\theta = 0$). Il suffit alors de tracer l'angle 2θ (correspondant à θ sur les facettes). Les coordonnées des points sont alors : $A_1 (\epsilon_{x1} ; \gamma_{x1y1} / 2)$, $B_1 (\epsilon_{y1} ; -\gamma_{x1y1} / 2)$



Recherche des déformations maximales

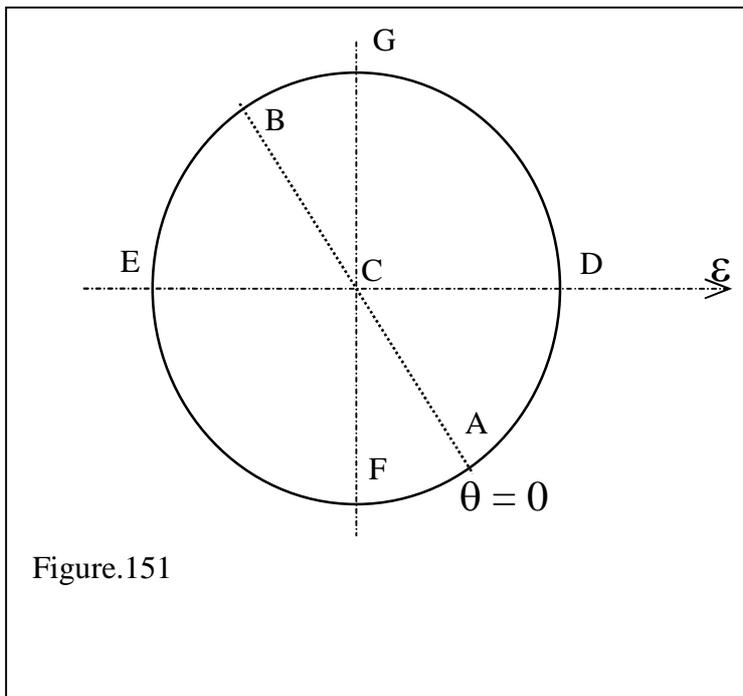
On trouve :

ϵ_{maxi} au point D

ϵ_{mini} au point E

γ_{maxi} au point F

γ_{mini} au point G



4) Jauges de contraintes.

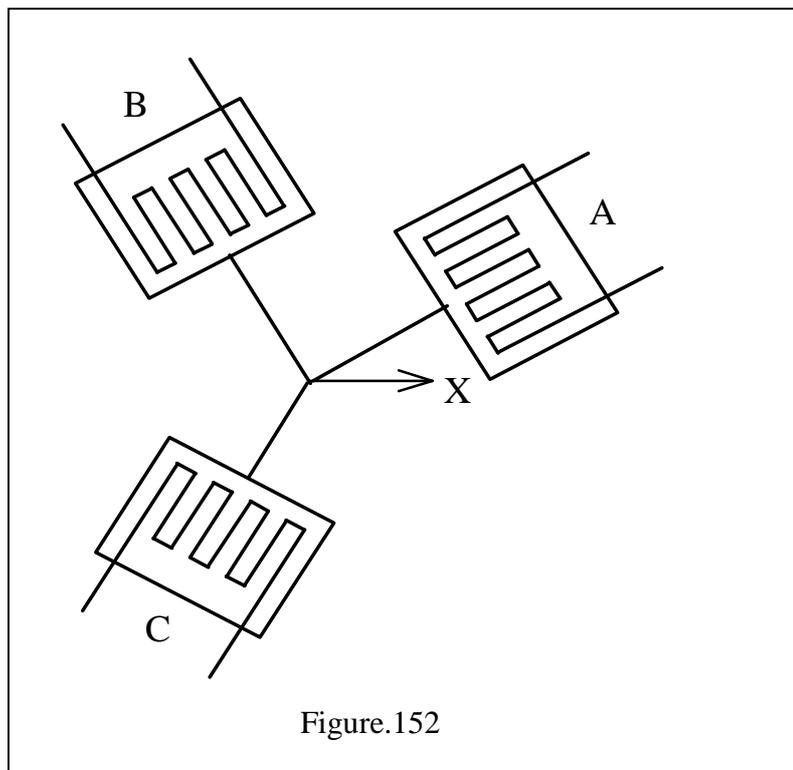
Pour mesurer les déformations, on utilise des jauges de contraintes ou rosettes, qui collées sur la surface de l'objet suivent les déformations de celui-ci. Le principe est simple, une jauge est en fait une résistance qui varie en fonction des déformations. Dans le cas général, en déformation plane on utilise 3 jauges ayant chacune une direction propre.

Chacune des jauges étant orientés par rapport à l'axe X. figure.152

Jauge A : angle (X,A) = θ_A

Jauge B : angle (X,B) = θ_B

Jauge C : angle (X,C) = θ_C



A l'aide du relevé des déformations ϵ_A , ϵ_B , ϵ_C on détermine alors ϵ_x , ϵ_y et γ_{xy} .

$$\begin{cases} \epsilon_A = \epsilon_x \cdot \cos^2(\theta_A) + \epsilon_y \cdot \sin^2(\theta_A) + \gamma_{xy} \cdot \sin(\theta_A) \cdot \cos(\theta_A) \\ \epsilon_B = \epsilon_x \cdot \cos^2(\theta_B) + \epsilon_y \cdot \sin^2(\theta_B) + \gamma_{xy} \cdot \sin(\theta_B) \cdot \cos(\theta_B) \\ \epsilon_C = \epsilon_x \cdot \cos^2(\theta_C) + \epsilon_y \cdot \sin^2(\theta_C) + \gamma_{xy} \cdot \sin(\theta_C) \cdot \cos(\theta_C) \end{cases}$$

On peut dans certains cas particulier avoir des relations plus simples, à savoir :

$$* \text{ rosette à } 45^\circ \begin{cases} \theta_A = 0^\circ \\ \theta_B = 45^\circ \\ \theta_C = 90^\circ \end{cases} \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_A \\ \varepsilon_y = \varepsilon_C \\ \gamma_{xy} = 2 \cdot \varepsilon_B - (\varepsilon_A + \varepsilon_C) \end{cases}$$

$$* \text{ rosette à } 60^\circ \begin{cases} \theta_A = 0^\circ \\ \theta_B = 60^\circ \\ \theta_C = 90^\circ \end{cases} \begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_A \\ \varepsilon_y = \frac{1}{3} \cdot (2 \cdot \varepsilon_B + 2 \cdot \varepsilon_C - \varepsilon_A) \\ \gamma_{xy} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot (\varepsilon_B - \varepsilon_C) \end{cases}$$

* remarque : si les directions principales sont connues, deux jauges orientées suivant ces directions suffisent.

5) Relation entre contraintes et déformations.

5.1) Loi de Hooke généralisée.

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot (\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_z)) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_z - \nu \cdot (\sigma_x + \sigma_y)) \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\begin{cases} \tau_{xy} = G \cdot \gamma_{xy} \\ \tau_{xz} = G \cdot \gamma_{xz} \\ \tau_{yz} = G \cdot \gamma_{yz} \end{cases}$$

A l'aide des relations précédentes, on peut alors retrouver les contraintes, à savoir :

$$\left[\begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} \cdot \left((1-\nu) \cdot \varepsilon_x + \nu \cdot (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right) \\ \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} \cdot \left((1-\nu) \cdot \varepsilon_y + \nu \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_z) \right) \\ \sigma_z = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} \cdot \left((1-\nu) \cdot \varepsilon_z + \nu \cdot (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right) \end{array} \right.$$

avec $G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$

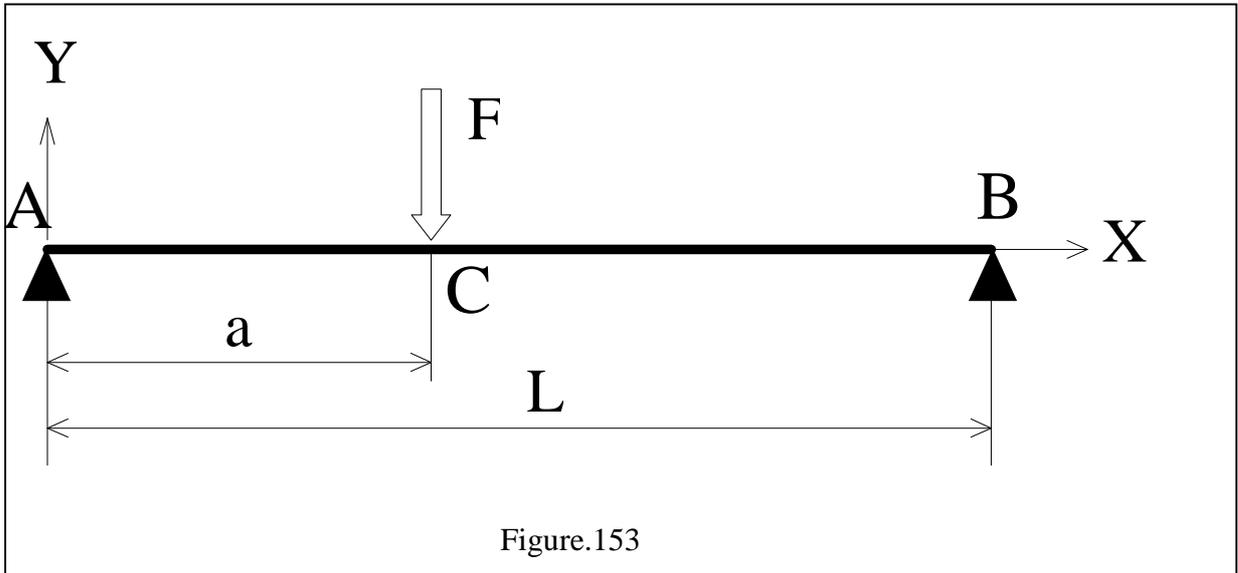
Comparaison entre l'état de contraintes planes et de déformations planes.

Etat	Contraintes Planes	Déformations Planes
Contraintes	$\sigma_z = 0 ; \tau_{xz} = 0 ; \tau_{yz} = 0$ $\sigma_x \neq 0 ; \sigma_y \neq 0 ; \tau_{xy} \neq 0$	$\tau_{xz} = 0 ; \tau_{yz} = 0$ $\sigma_x \neq 0 ; \sigma_y \neq 0 ; \sigma_z \neq 0 ; \tau_{xy} \neq 0$
Déformations	$\gamma_{xz} = 0 ; \gamma_{yz} = 0$ $\epsilon_x \neq 0 ; \epsilon_y \neq 0 ; \epsilon_z \neq 0 ; \gamma_{xy} \neq 0$	$\epsilon_z = 0 ; \gamma_{xz} = 0 ; \gamma_{yz} = 0$ $\epsilon_x \neq 0 ; \epsilon_y \neq 0 ; \gamma_{xy} \neq 0$
Loi de Hooke généralisée	$\left[\begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot (\epsilon_x + \nu \cdot \epsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{(1-\nu^2)} \cdot (\nu \cdot \epsilon_y + \epsilon_x) \\ \sigma_z = 0 \end{array} \right.$ $\left[\begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) \\ \epsilon_y = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) \\ \epsilon_z = \frac{-\nu}{E} \cdot (\sigma_x + \sigma_y) \end{array} \right.$	$\left[\begin{array}{l} \sigma_x = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} \cdot ((1-\nu) \cdot \epsilon_x + \nu \cdot \epsilon_y) \\ \sigma_y = \frac{E}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} \cdot ((1-\nu) \cdot \epsilon_y + \nu \cdot \epsilon_x) \\ \sigma_z = \frac{\nu \cdot E}{(1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)} \cdot (\epsilon_x + \epsilon_y) \end{array} \right.$ $\left[\begin{array}{l} \epsilon_x = \frac{(1+\nu)}{E} \cdot ((1-\nu)\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y) \\ \epsilon_y = \frac{(1+\nu)}{E} \cdot ((1-\nu)\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x) \\ \epsilon_z = 0 \end{array} \right.$

EXERCICES

1. MODELISATION

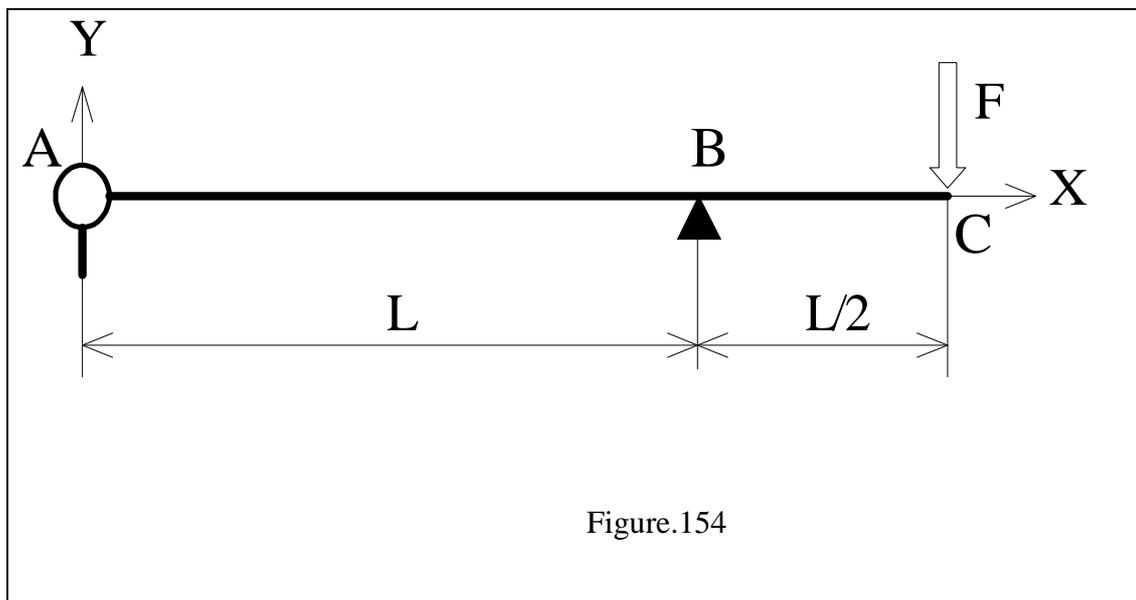
1. Déterminer en fonction des paramètres a , L , et F les éléments de réduction du torseur de cohésion pour la poutre ci-dessous. Tracer les diagrammes correspondants. figure.153



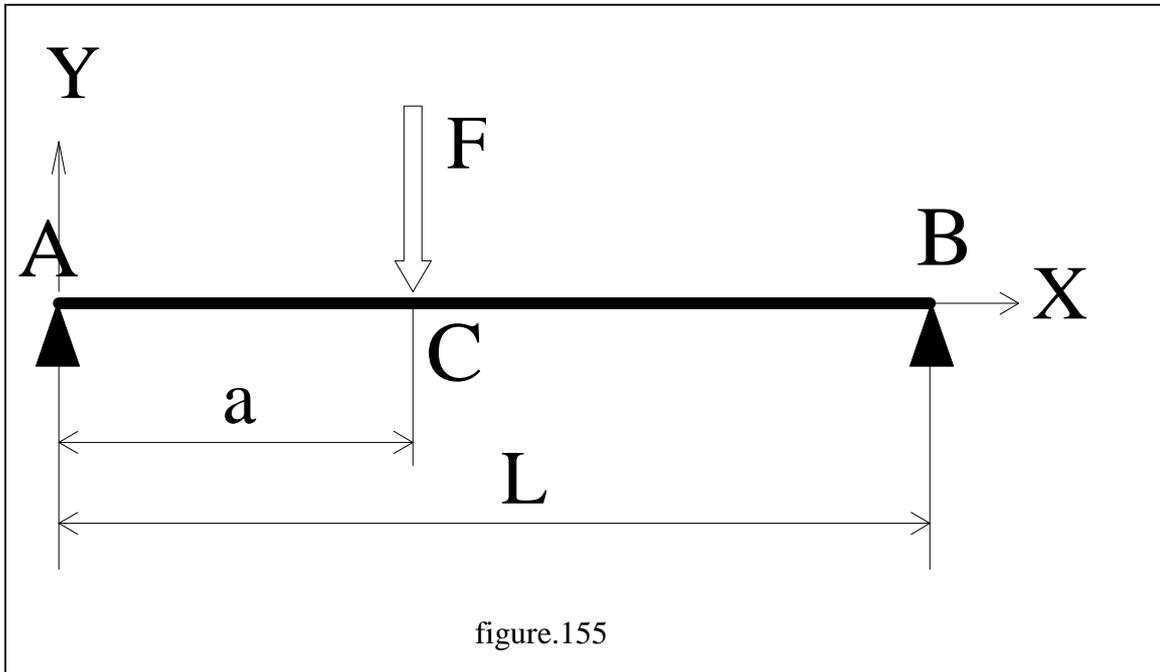
2. Déterminer en fonction des paramètres L et F les éléments de réduction du torseur de cohésion pour la poutre ci-dessous. Figure.154

Quel est le torseur transmissible par la liaison en A ? Est-ce conforme à la modélisation ?

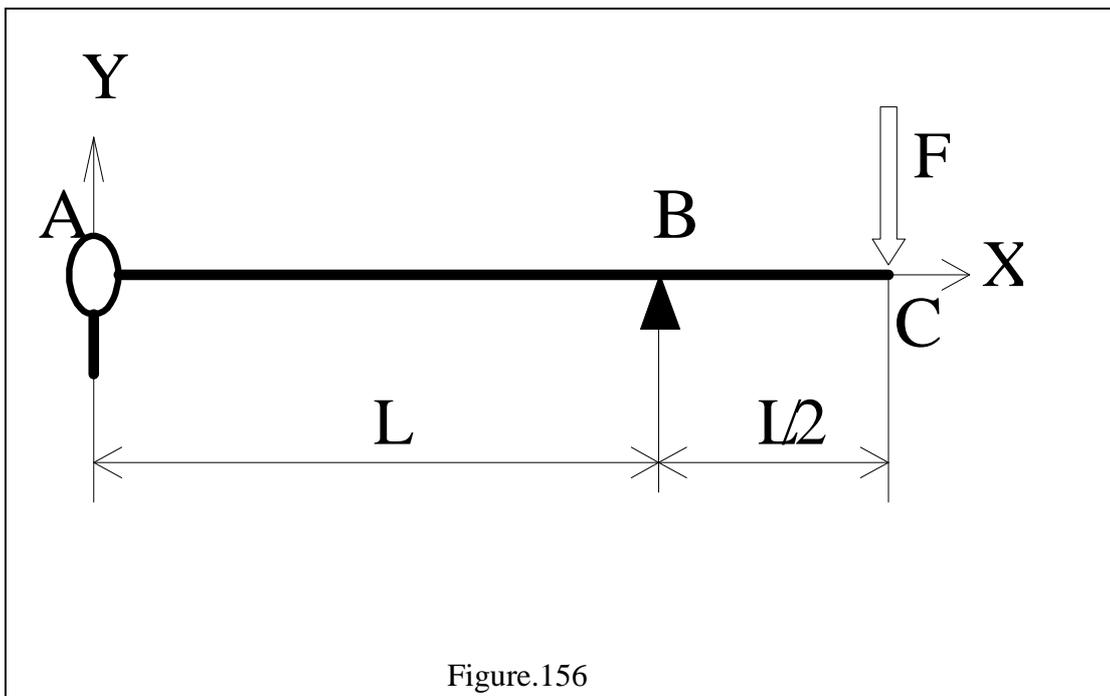
Tracer les diagrammes correspondants.



3. Déterminer en fonction des paramètres a , L , et F les éléments de réduction du torseur de cohésion pour la poutre ci-dessous. Tracer les diagrammes correspondants. figure.155



Déterminer en fonction des paramètres L et F les éléments de réduction du torseur de cohésion pour la poutre ci-dessous. figure.156
 Quel est le torseur transmissible par la liaison en A ? Est-ce conforme à la modélisation ?
 Tracer les diagrammes correspondants.



3. Le modèle ci-dessous correspond à une fourchette d'embrayage. Celle-ci reçoit de la part de la butée deux actions mécaniques identiques aux extrémités C_1 et C_2 . figure.157

La résultante de ces actions a pour composantes F_x et F_y .

3.1) Déterminer les actions mécaniques transmises par les liaisons de centre A, B_1 , B_2 .

3.2) Calculer les éléments de réduction du torseur de cohésion pour la poutre AB.

3.3) Calculer les éléments de réduction du torseur de cohésion pour la poutre B_1B_2 .

3.4) Calculer les éléments de réduction du torseur de cohésion pour la poutre B_1C_1 .

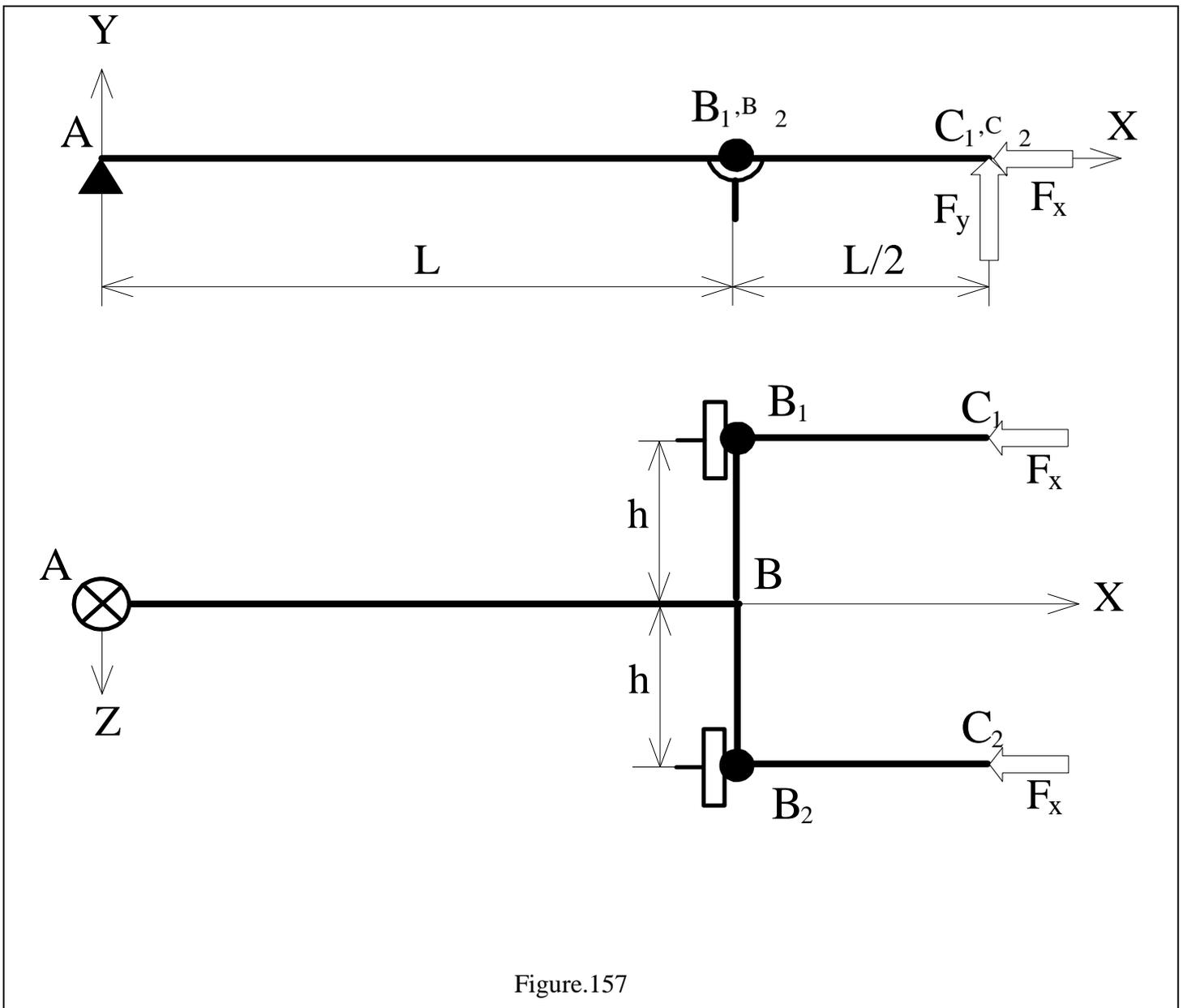


Figure.157

2. CISAILLEMENT

Exercice n° 1 :

La barre (1) de section rectangulaire est assemblée au gousset (2) par deux cordons de soudure d'épaisseur $a = 3 \text{ mm}$ et de longueur L . figure.158

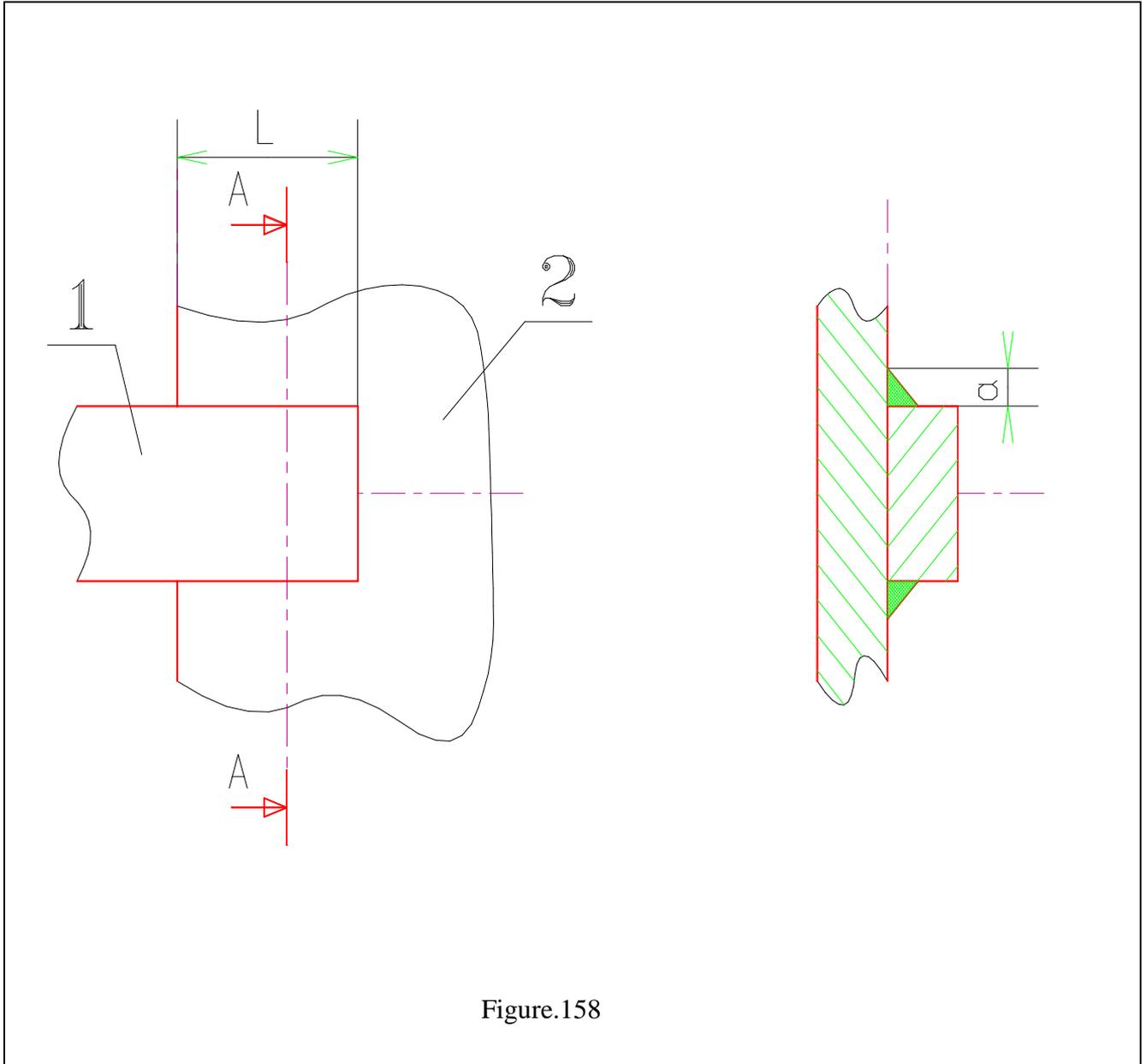


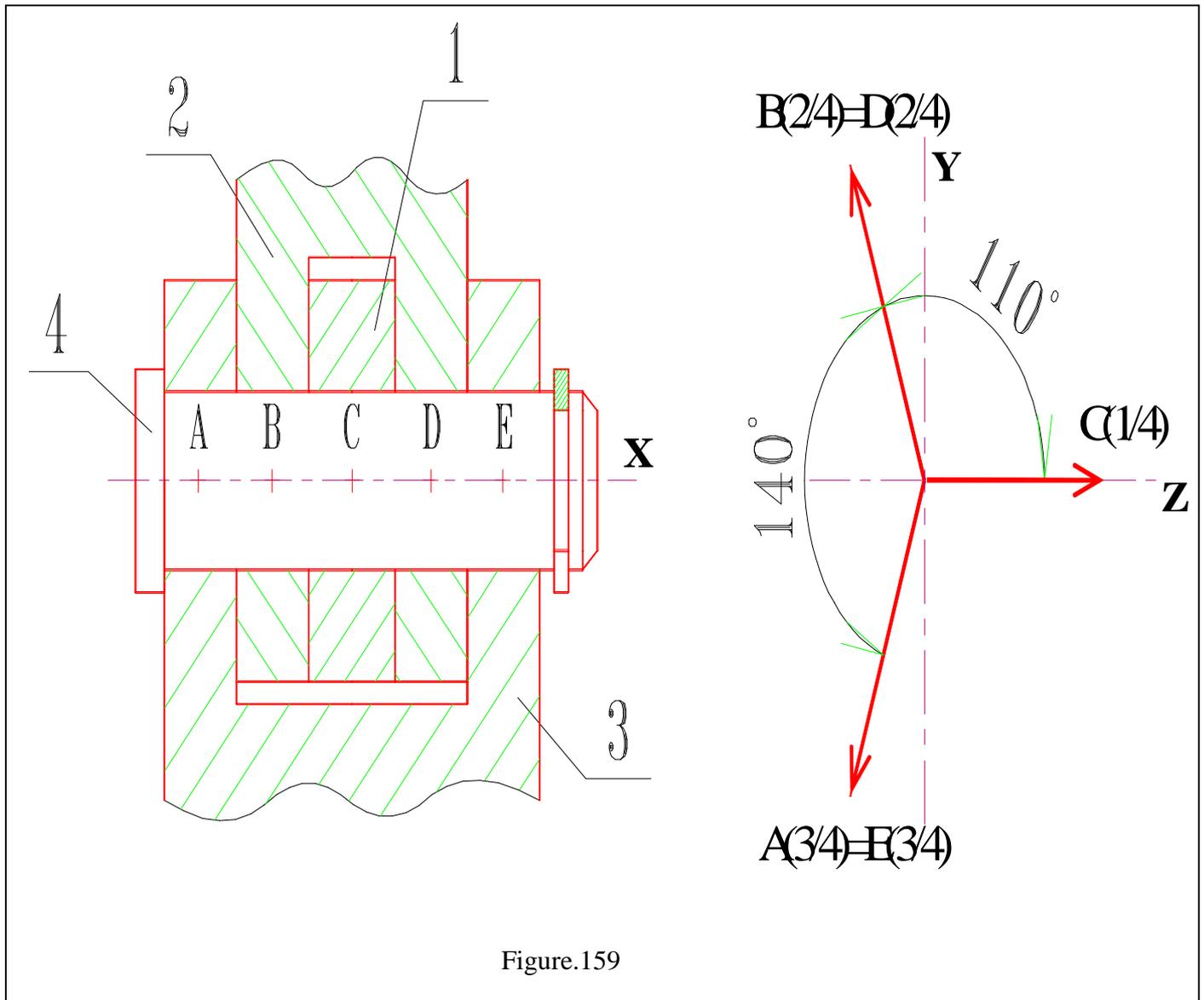
Figure.158

Sur cette barre s'exerce une force horizontale $F = 1,5 \cdot 10^4 \text{ N}$. Le métal d'apport utilisé pour la soudure a une contrainte pratique au cisaillement $\tau_p = 200 \text{ MPa}$. On adopte un coefficient de sécurité de 4.

Quelle est la longueur minimale L des cordons de soudure ?

Exercice n° 2 :

On considère une articulation en chape représentée ci-dessous. Figure.159



L'axe d'articulation (4) est en acier doux de contrainte pratique au cisaillement $\tau_p = 150$ MPa. On adopte un coefficient de sécurité de 4.

On suppose les forces uniformément réparties sur chacune des surfaces de contact et symétriques par rapport au plan (C,y,z). Une étude préliminaire de statique nous a permis de calculer les forces suivantes

$$A(3 \rightarrow 4) = E(3 \rightarrow 4) = B(2 \rightarrow 4) = D(2 \rightarrow 4) = 3\ 000\ \text{N}$$

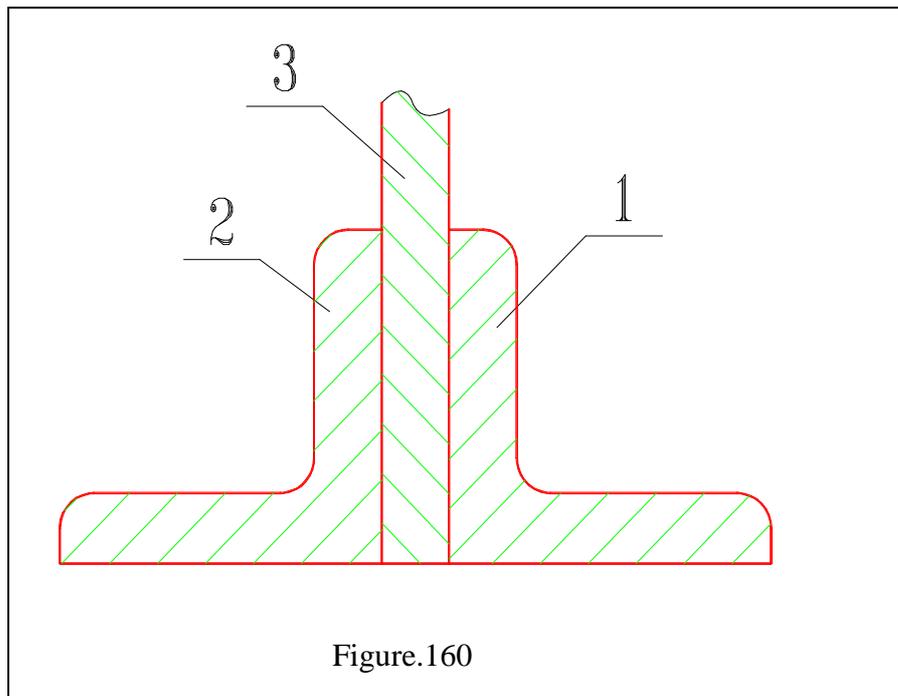
$$C(1 \rightarrow 4) = 4\ 100\ \text{N}$$

2.1) Déterminer la norme des efforts tranchants T dans les sections S_{AB} située entre A et B , S_{BC} , S_{CD} , S_{DE} .

2.2) En ne prenant en compte que le cisaillement déterminer le diamètre de l'axe.

Exercice n° 3 :

Un élément de poutre en treillis est constitué par deux cornières (1) et (2) de dimension $25 \times 25 \times 4$. Cet élément de poutre est soumis à une force $F = 40\,000$ N. figure.160



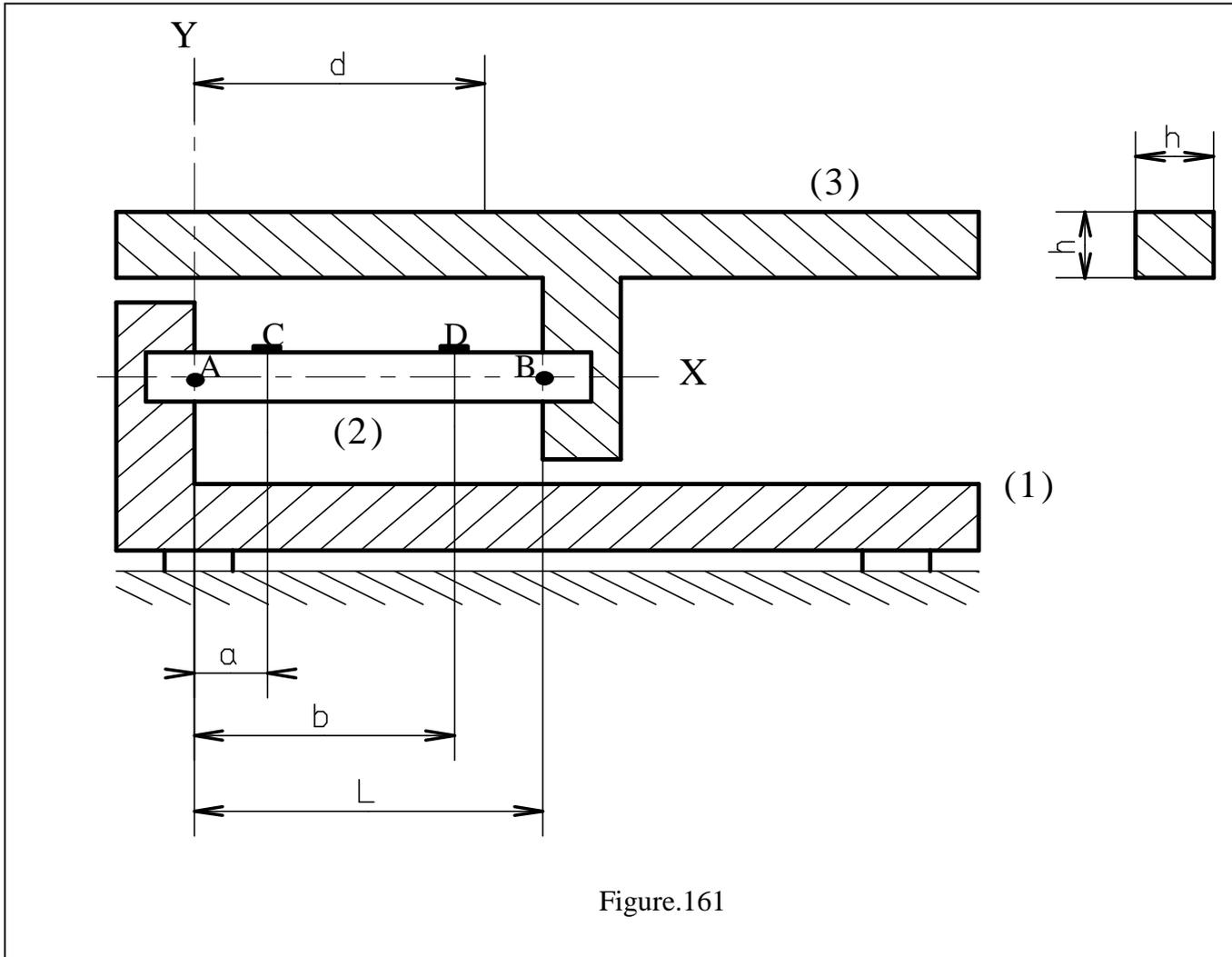
Les cornières (1) et (2) sont fixées à un gousset (3) par des rivets de diamètre $d = 8$ mm. Ces rivets sont en acier doux de contrainte pratique au cisaillement $\tau_p = 200$ MPa. On adopte un coefficient de sécurité de 3.

Calculer le nombre de rivets nécessaires pour réaliser cette liaison.

4. PESE PERSONNE

Le système étudié est constitué d'un châssis (1) et d'un plateau (3) liés par l'intermédiaire d'une poutre (2) encastrée dans chacun d'eux. Deux jauges de déformation permettent de mesurer l'allongement unitaire en deux points C et D de la face supérieure de la poutre. Le traitement de ces deux mesures permet de connaître la valeur de la charge P indépendamment de sa position sur le plateau.

On schématise le système de la manière suivante : figure.161



Le principe du traitement de la mesure est le suivant :



Hypothèses :

- ◆ le châssis (1) est supposé indéformable.
- ◆ le plateau (3) est supposé indéformable et de masse négligeable.
- ◆ la poutre a pour caractéristiques :

$E = 2.10^5$ MPa
$L = 95$ mm
$h = 15$ mm
$d = 80$ mm

- ◆ les liaisons en A et B sont des encastremements parfaits.
- ◆ la charge admissible selon le constructeur est comprise entre 7 et 150 daN.
- ◆ les jauges de déformation sont situées à : $a = 20 \text{ mm}$ et $b = 75 \text{ mm}$.

Travail demandé :

On demande de travailler de manière littérale jusqu'à la question 7).

- 1) Etudier l'équilibre du plateau (3).
En déduire les actions dans l'encastrement en B.
- 2) Etudier l'équilibre de l'ensemble (2+3).
En déduire les actions dans l'encastrement en A.
- 3) Déterminer le torseur de cohésion dans la poutre (2).
- 4) Etablir une relation donnant l'allongement unitaire ϵ_x , sur la face supérieure à une distance x , en fonction de la charge P .
- 5) Exprimer les allongements unitaires ϵ_{xc} et ϵ_{xd} .
En déduire une expression de la charge P indépendante de d .
- 6) Déterminer l'expression de la flèche en B.
Donner les valeurs de d pour lesquelles elle est positive, négative ou nulle.
- 7) On mesure les allongements suivants : figure.162

$$\epsilon_{xc} = -6,4 \cdot 10^{-4} \quad \text{et} \quad \epsilon_{xd} = -5,33 \cdot 10^{-5}$$

Calculer la charge P .

Tracer les diagrammes correspondants.

Calculer la valeur de la flèche en B.

Calculer l'inclinaison du plateau en degré.

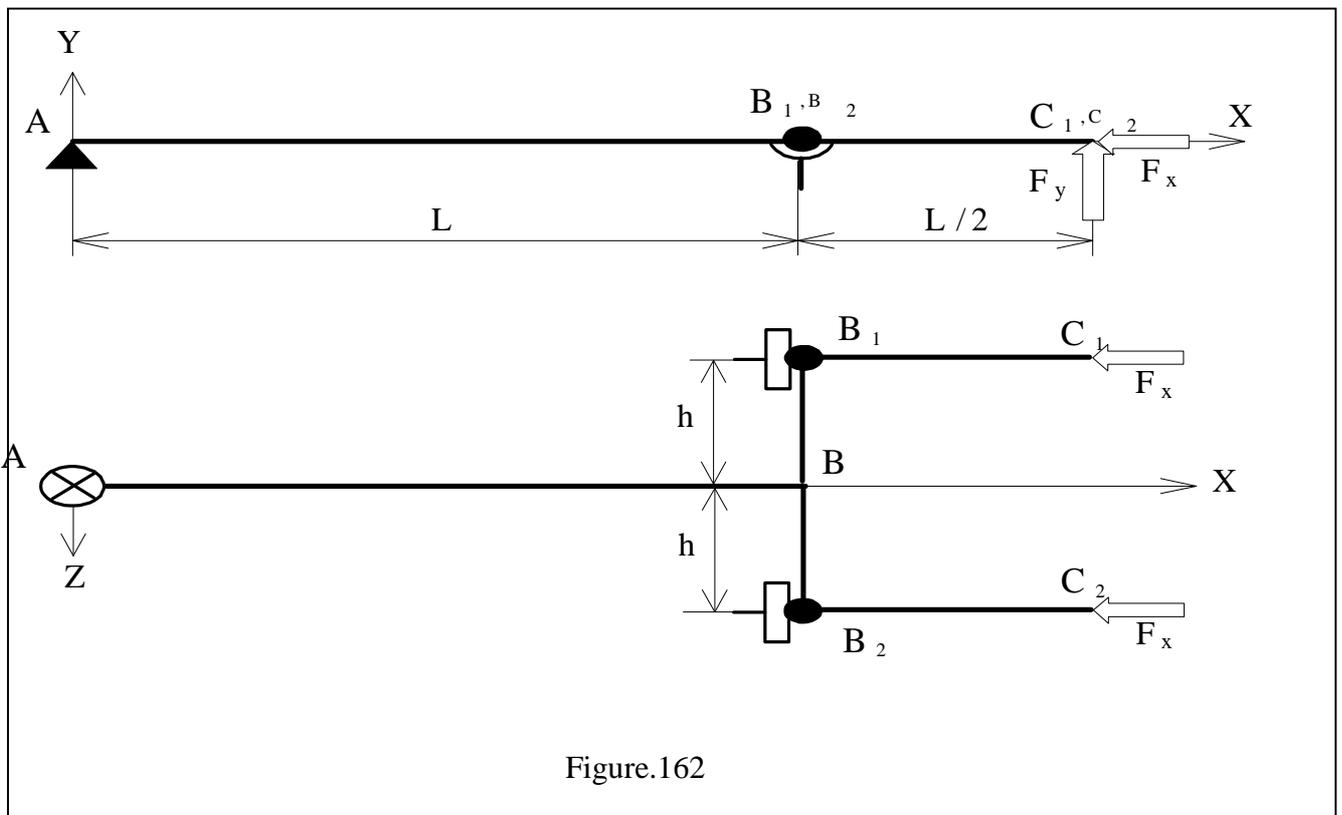


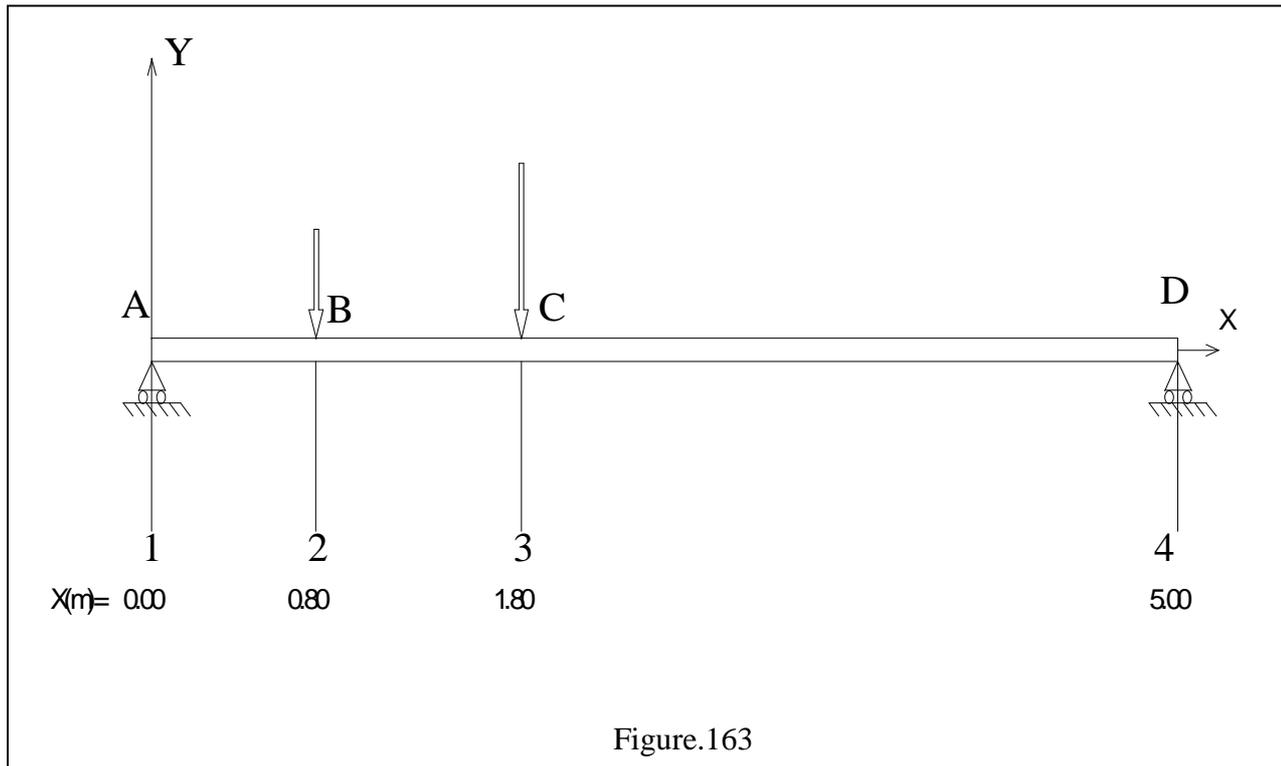
Figure.162

EXERCICES DE FLEXION

Exercice n° 1 :

La figure 163 ci-dessous donne la modélisation d'une poutre (1) reposant sur (2) par l'intermédiaire de deux appuis (liaison linéaire rectiligne). Le plan (A,x,y) est un plan de symétrie pour la poutre et pour les charges.

La poutre a une section rectangulaire de largeur $b = 15 \text{ mm}$ et de hauteur $h = 75 \text{ mm}$.



Elle est en acier E28 pour lequel $\sigma_{\text{emini}} = 225 \text{ MPa}$.

On exerce en B une force concentrée modélisable par un glisseur $B = 500 \text{ N}$.

On exerce en C une force concentrée modélisable par un glisseur $C = 800 \text{ N}$.

1.1) Exprimer les torseurs des actions mécaniques aux appuis.

1.2) Déterminer le torseur de cohésion le long de la poutre.

Tracer les diagrammes correspondants.

1.3) En déduire la valeur du moment de flexion maximal et la position de la section correspondante.

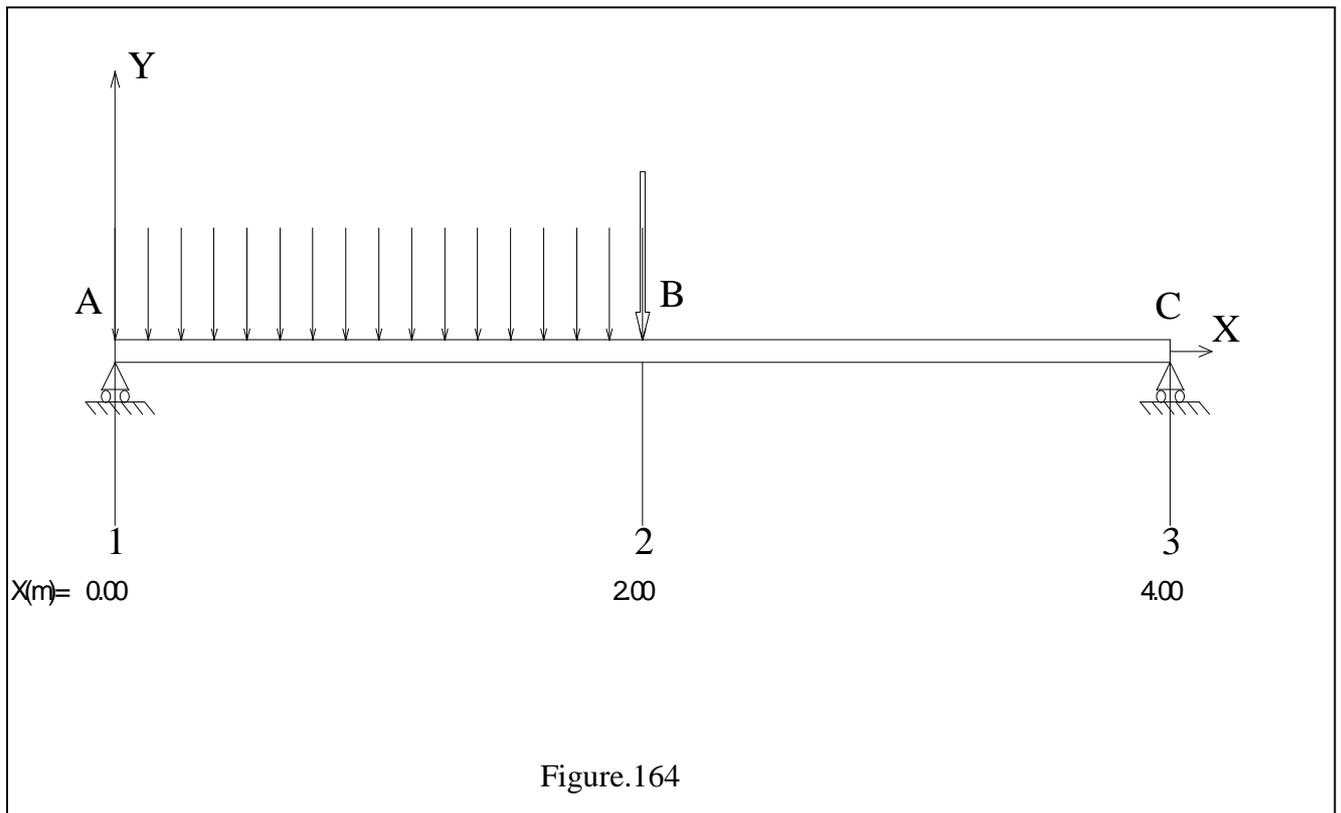
1.4) Déterminer la contrainte normale maximale.

En déduire le coefficient de sécurité dont on dispose.

Exercice n° 2 :

La figure 164 ci-après donne la modélisation d'une poutre (1) reposant sur (2) par l'intermédiaire de deux appuis (liaison linéaire rectiligne). Le plan (A,x,y) est un plan de symétrie pour la poutre et pour les charges.

La poutre a une section rectangulaire de largeur $b = 30 \text{ mm}$ et de hauteur $h = 60 \text{ mm}$. Elle est en acier E36 pour lequel $\sigma_{\text{emini}} = 325 \text{ MPa}$.



On exerce en B une force concentrée modélisable par un glisseur $B = 1200 \text{ N}$.

On exerce entre A et B une force répartie de densité de force $dF = 800 \text{ N/m}$.

2.1) Exprimer les torseurs des actions mécaniques aux appuis.

2.2) Déterminer le torseur de cohésion le long de la poutre.

Tracer les diagrammes correspondants.

2.3) En déduire la valeur du moment de flexion maximal et la position de la section correspondante.

2.4) Déterminer la contrainte normale maximale.

En déduire le coefficient de sécurité dont on dispose.

Exercice n° 3 :

La figure suivante donne la modélisation d'une poutre (1) encastrée à (2) en B.

Le plan (A,x,y) est un plan de symétrie pour la poutre et pour les charges.

La poutre de longueur $AB = 1,5 \text{ m}$ a une section rectangulaire de largeur b et de hauteur $h = 2.b$

. Elle est en acier E36 pour lequel $\sigma_{\text{emini}} = 325 \text{ MPa}$ et $E = 2.10^5 \text{ MPa}$. Figure.165

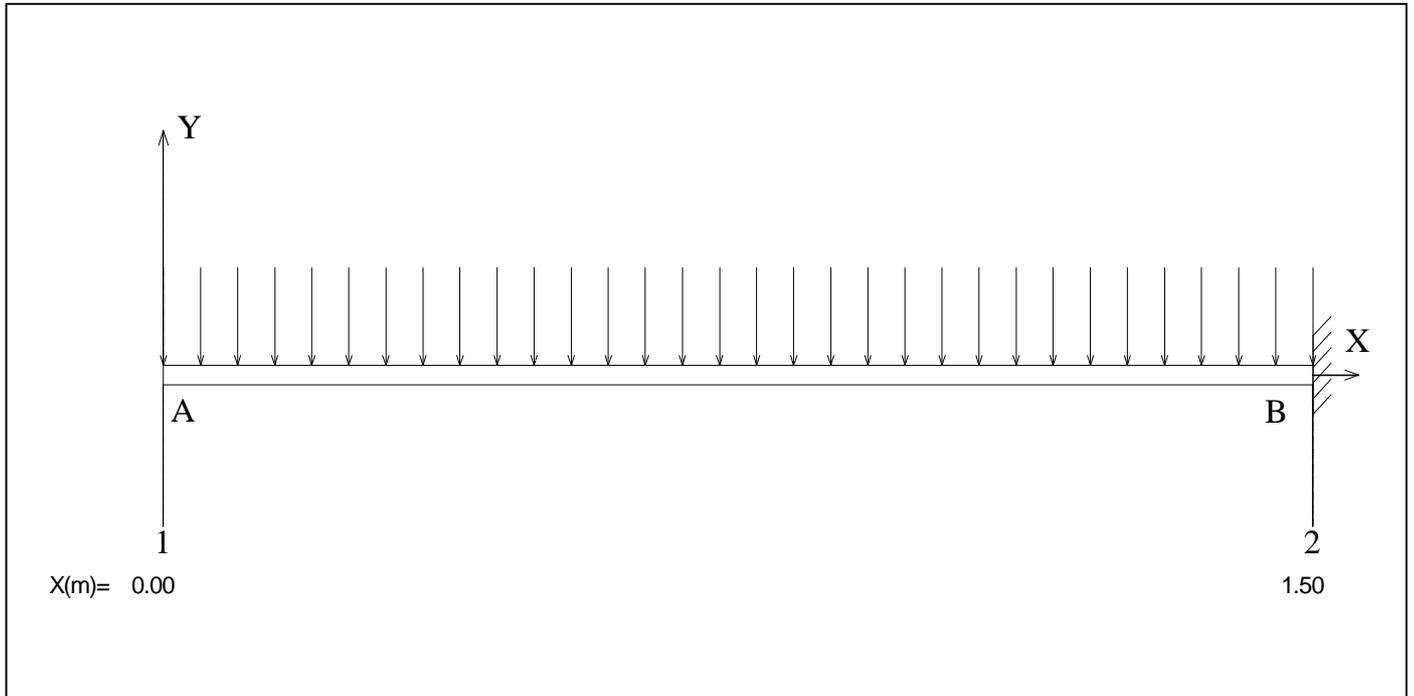


Figure.165

On exerce entre A et B une force répartie de densité de force $dF = 800 \text{ N/m}$.

On impose dans la section en B un coefficient de concentration de contrainte de 1,8 et un coefficient de sécurité de 3.

3.1) Déterminer le torseur de cohésion le long de la poutre.

Tracer les diagrammes correspondants.

3.2) En déduire la valeur du moment de flexion maximal et la position de la section correspondante.

3.3) Déterminer les dimensions minimales b et h de la section B.

3.5) Etablir l'équation de la déformée le long de la poutre $y(x)$.

3.6) Déterminer la flèche maximale. Où a-t-elle lieu ?

3.7) On veut limiter cette flèche à 3 mm.

Déterminer les dimensions minimales b et h de la section B.

20. ESSAIS MECANIQUE

Effectués en laboratoire ou sur le terrain, ils apportent des renseignements précis et fiables sur les performances d'un matériau. Il en existe un grand nombre qui sont réglementés par des normes internationales pour la plupart.

20.1.Principaux essais :

Essais mécaniques (traction, dureté, résilience, fatigue, fluage. . .).

Essais pour la productique (emboutissage, pliage, usinabilité...).

Essais sur les surfaces (abrasion, rayures, rugosité, adhérence. . .).

Essais sur les fluides (viscosité, écoulements. , ,).

20.2.ESSAI DE TRACTION

Essai le plus classique, il consiste à exercer sur une éprouvette normalisée (pièce de dimensions normalisées fabriquée dans le matériau à tester), cylindrique ou parallélépipédique (plate), deux actions mécaniques et opposées qui vont la déformer progressivement puis la rompre.

Ces deux sollicitations simples sont distinctes et un certain nombre de matériaux ont un comportement différent en extension et en compression (par exemple, la fonte grise Ft20 a pour contrainte limite élastique en extension 20 MPa et pour contrainte limite élastique en compression 150 MPa). Cependant dans les deux cas nous arriverons aux mêmes relations de contraintes et de déformations.

Dans un grand nombre d'applications l'une de ces sollicitations sur une pièce entraîne l'autre sollicitation sur la pièce qui assure la liaison (immobilisation de deux pièces par vis, boulons ou goujons).

Dans le repère (G, X, y, z) lie a la section, extension et compression se différencieront par le signe de l'effort normal $N > 0$ extension, $N < 0$ compression.

Définitions :

Une poutre est sollicitée à l'extension simple lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées qui tendent à l'allonger et appliquées au centre de la surface des sections extrêmes.

Dans le repère $R = (G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ de définition des sollicitations :

$$\{T_{coh}\} = \{E_2 \rightarrow E_1\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{M}_G \end{array} \right\}_G = \left\{ \begin{array}{cc} N > 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right\}_{(G, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})}$$

Une poutre "courte" est sollicitée à la compression simple lorsqu'elle est soumise à deux forces directement opposées qui tendent à la raccourcir et appliquées au centre de la surface des sections extrêmes.

Dans le repère $R = (G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de définition des sollicitations :

$$\{T_{coh}\} = \{E_2 \rightarrow E_1\} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ M_G \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} N < 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Contraintes :

Dans les deux sollicitations, extension et compression, elles s'expriment de la même façon :

(dans le cas d'une répartition uniforme des contraintes)

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

Avec :

σ = contrainte normale en Mpa

N = effort normal en N

S = aire d la section droite en mm²

Extension : $N > 0, \sigma > 0$

Compression : $N < 0, \sigma < 0$

Conditions de résistance :

Pour des raisons de sécurité, la contrainte normale σ doit rester inférieure à une valeur limite appelée contrainte pratique à l'extension ou à la compression.

$$\sigma_p = \frac{Re}{s}$$

σ_{pe} ou σ_{pc} est obtenu en divisant la limite élastique Re par un coefficient de sécurité s :

En extension : $\sigma \leq \sigma_{pe}$ ou $\frac{N}{S} \leq \sigma_{pe}$

Avec σ_{pe} = contrainte pratique à l'extension

En compression : $\sigma \leq \sigma_{pc}$ ou $\frac{N}{S} \leq \sigma_{pc}$

avec σ_{pc} = contrainte pratique à la compression

Majorer la valeur de la contrainte théorique σ par le coefficient de concentration de contrainte k

Loi de Hooke fig.166

En déformation élastique, la contrainte normale σ est proportionnelle à l'allongement relatif ε

loi de Hooke :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

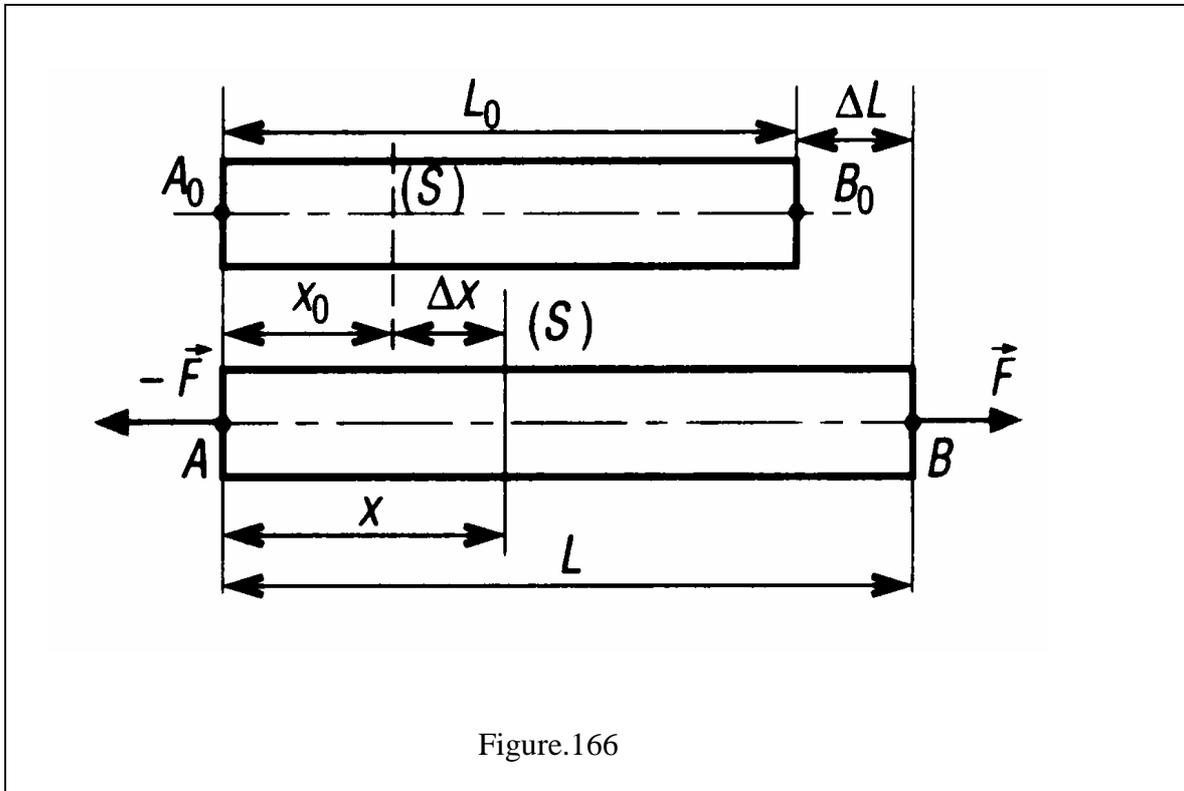


Figure.166

σ = contrainte normale en Mpa

E = module de Young en Mpa

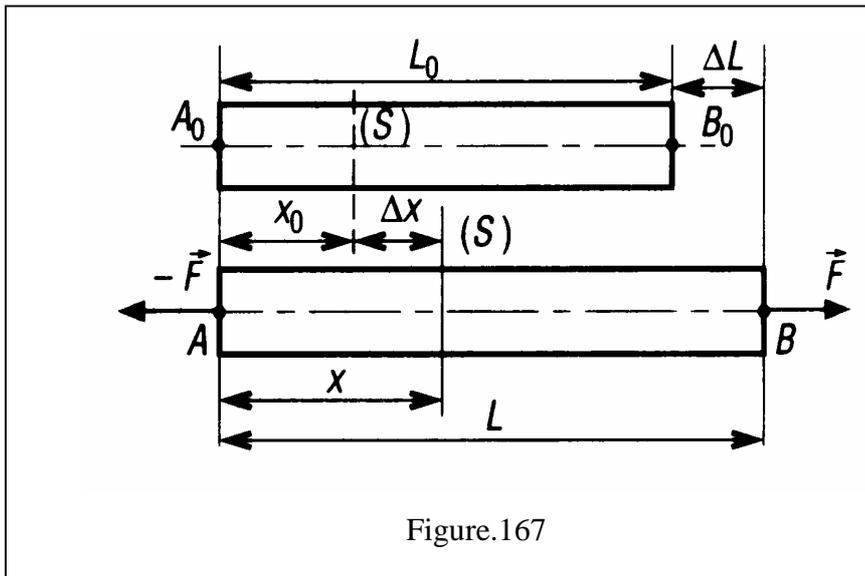
ε = allongement relatif sans unités

remarque :

Déformations figure.167

L'allongement est proportionnel aux dimensions initiales

$$\text{On a : } \sigma = \frac{N}{S} \quad \text{et} \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}$$



- σ = contrainte normale en Mpa
- E = module de Young en Mpa
- ε = allongement relatif sans unités
- ΔL = allongement en mm
- L_0 = longueur initiale
- N = effort normal en N
- S = aire de la section droite en mm²

Dans les deux sollicitations, extension et compression, elles s'expriment de la même façon :

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon} \quad \text{Soit} \quad \boxed{\Delta L = \frac{NL_0}{ES}}$$

Une poutre tendue, de longueur l , de section S , construite dans un matériau de module de Young E et sollicitée dans une section droite quelconque par un effort normal $N > 0$ connu, s'allonge de Δl .

Contraction latérale – Coefficient de Poisson ν

Le coefficient de Poisson caractérise le rapport entre

l'allongement relatif de la poutre ε_L et la contraction

latérale ε_d

$$\boxed{-\frac{\varepsilon_d}{\varepsilon_L} = -\frac{\text{déformation latérale}}{\text{déformation axiale}}}$$

-Coefficient de concentration de contraintes

Quand la poutre présente de brusques variations de section (filetage, rainures, épaulement...), la répartition des contraintes n'est plus uniforme et la contrainte réelle est plus grande que σ . Il y a concentration de contrainte au voisinage du changement de section. On prend alors :

$$\sigma_{\text{réelle}} = k \cdot \sigma$$

k = coefficient de concentration de contrainte

Exemple 1 :

Un tirant de 2 m de long supporte dans une section droite un effort normal d'extension de $N = 5000$ N. Il est en acier pour lequel : $\sigma_{pe} = 100$ Mpa, $E = 20000$ Mpa.

Déterminer son diamètre minimal et son allongement

Diamètre :

$$\frac{N}{S} \leq \sigma_{pe} \text{ d'ou } S \geq \frac{N}{\sigma_{pe}} \rightarrow S \geq \frac{5000}{100} \rightarrow S \geq 50 \text{ mm}^2 \text{ donc } d \geq 8 \text{ mm}$$

$$\text{Allongement : } \Delta l = \frac{Nl}{E \cdot S} = \frac{5000 \times 2000}{50 \times 20000} = 1 \text{ mm}$$

Cas d'une enveloppe cylindrique mince

Soit un réservoir cylindrique (E) de diamètre intérieur d , de longueur l et d'épaisseur e avec p la pression effective à l'intérieur du réservoir. Figure.168

Le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est le repère des sollicitations S est l'aire

de la section fictive par le plan (\vec{y}, \vec{z}) donc $S = 2el$

Compte tenu de la pression intérieure, le réservoir reçoit une sollicitation d'extension telle que :

$$N = p \cdot l \cdot d$$

$$S = 2 \cdot e \cdot l$$

$$\sigma = \frac{N}{S}$$

$$\sigma = \frac{p \cdot d}{2 \cdot e}$$

p en Mpa, d, e, l en mm

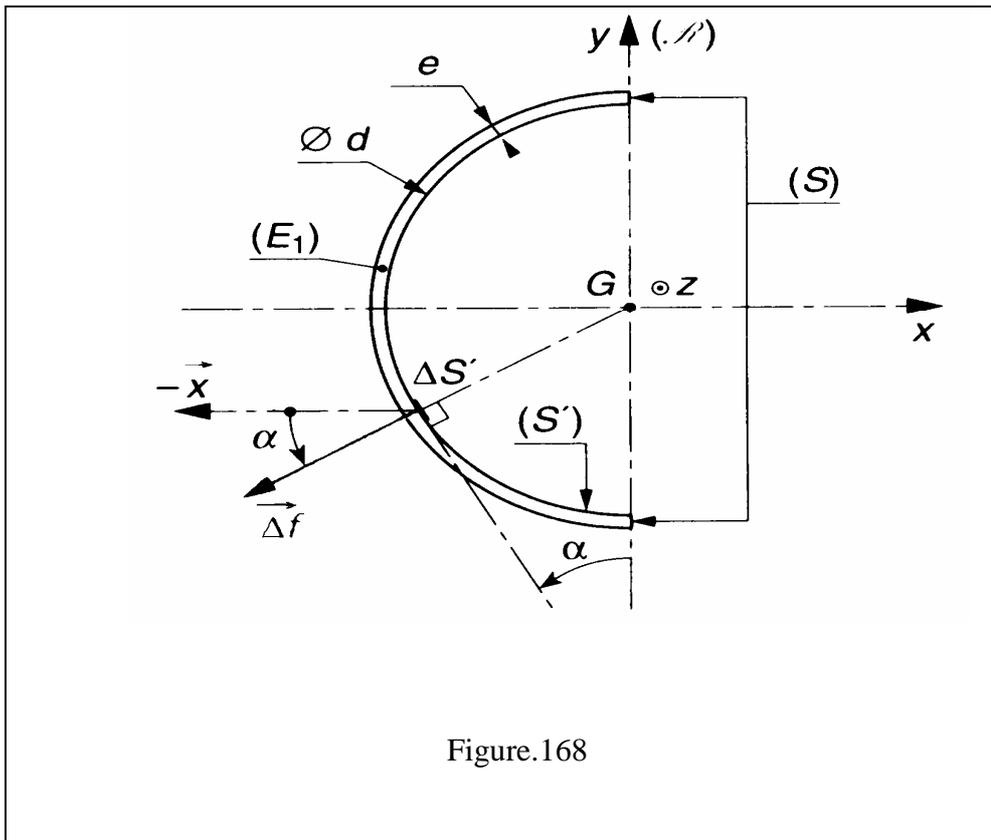


Figure.168

Cas d'une enveloppe sphérique mince

Soit un réservoir sphérique (E) de diamètre intérieur d et d'épaisseur e avec p la pression effective à l'intérieur du réservoir.

Le repère $(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est le repère des sollicitations

S est l'aire de la section fictive par le plan (\vec{y}, \vec{z}) donc $S \approx \pi \cdot d \cdot e$

Compte tenu de la pression intérieure, le réservoir reçoit une sollicitation d'extension telle que :

$$N = p \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4} \quad S \approx \pi \cdot d \cdot e \quad \sigma = \frac{N}{S} \quad \boxed{\sigma = \frac{p \cdot d}{4 \cdot e}}$$

p en Mpa, d, e en mm

Exemple 1

Une presse hydraulique est alimentée en huile par un tube en acier de diamètre 10 mm sous une pression de 10 Mpa .

La contrainte pratique en extension du tube : $\sigma_{pe} = 60 \text{ MPa}$

La pression atmosphérique est d'environ : $p_0 = 0.1 \text{ Mpa}$

Calculer l'épaisseur minimale du tube

La condition de résistance se traduit par

$$\frac{p \cdot d}{2 \cdot e} \leq \sigma_{pe} \quad \text{avec} \quad 10 - 0,1 = 9,9 \text{ MPa}$$

$$\text{Donc } e \geq \frac{9,9 \times 10}{2 \times 60} \approx 0,83 \text{ mm}$$

On optera pour une tube d'épaisseur 1 mm

Exemple 2

Un réservoir sphérique en tôle d'acier a un diamètre de 2 m. Il contient un gaz liquéfié sous une pression de 0.5 Mpa. L'acier utilisé a une contrainte limite élastique $R_e = 300 \text{ MPa}$ et on adopte un coefficient de sécurité $s = 10$. La pression atmosphérique est d'environ : $p_0 = 0.1 \text{ Mpa}$

Calculer l'épaisseur minimale de la tôle

La condition de résistance se traduit par

$$\frac{p \cdot d}{4 \cdot e} \leq \sigma_{pe} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} &0,5 - 0,1 = 0,4 \text{ MPa} \\ &2000 \text{ mm} \\ &\frac{R_e}{s} = \frac{300}{10} = 30 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\text{Donc } e \geq \frac{0,4 \times 2000}{4 \times 30} \approx 6,7 \text{ mm}$$

On optera pour une tôle d'épaisseur 7 mm

Courbes de contraintes et déformation figure.169, 170 et 171

Pour un grand nombre de matériaux, comme les alliages, les courbes obtenues présentent une zone, appelée domaine élastique où le graphe est une droite (segment OA). Pour tous les points de cette droite, la déformation (ou l'allongement) est proportionnelle à la contrainte et le matériau est élastique.

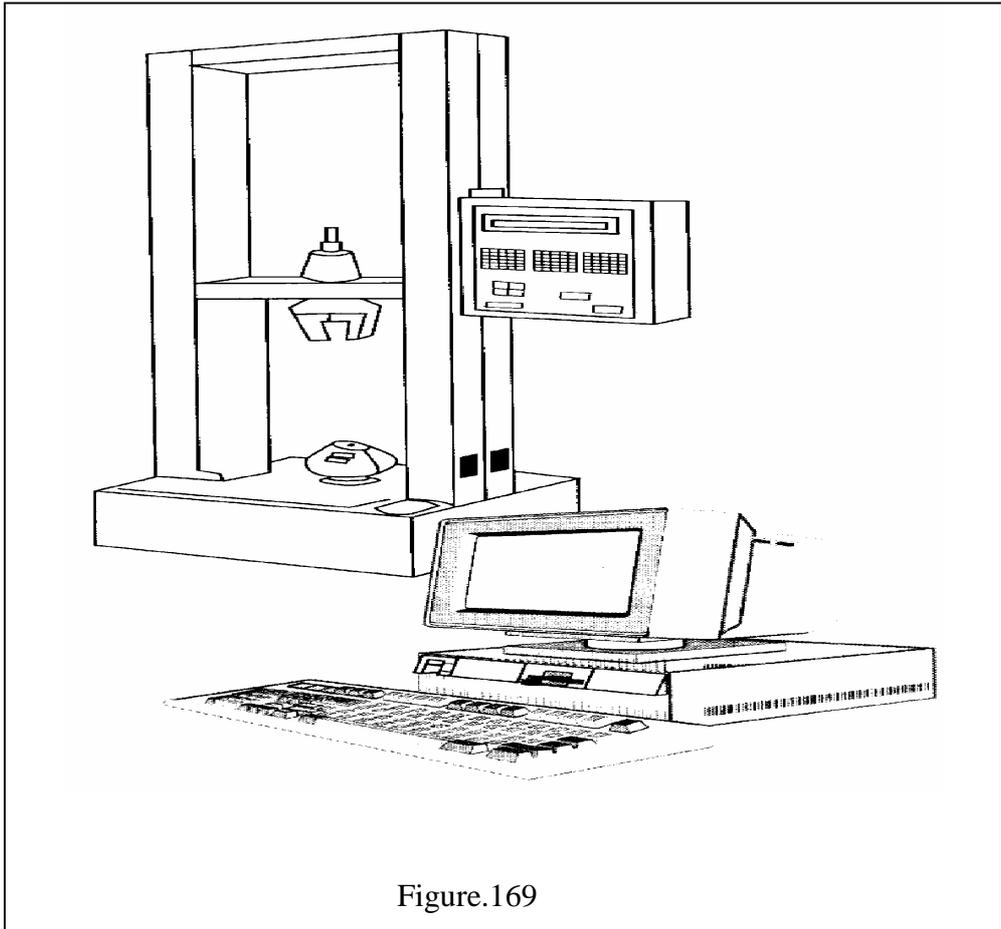


Figure.169

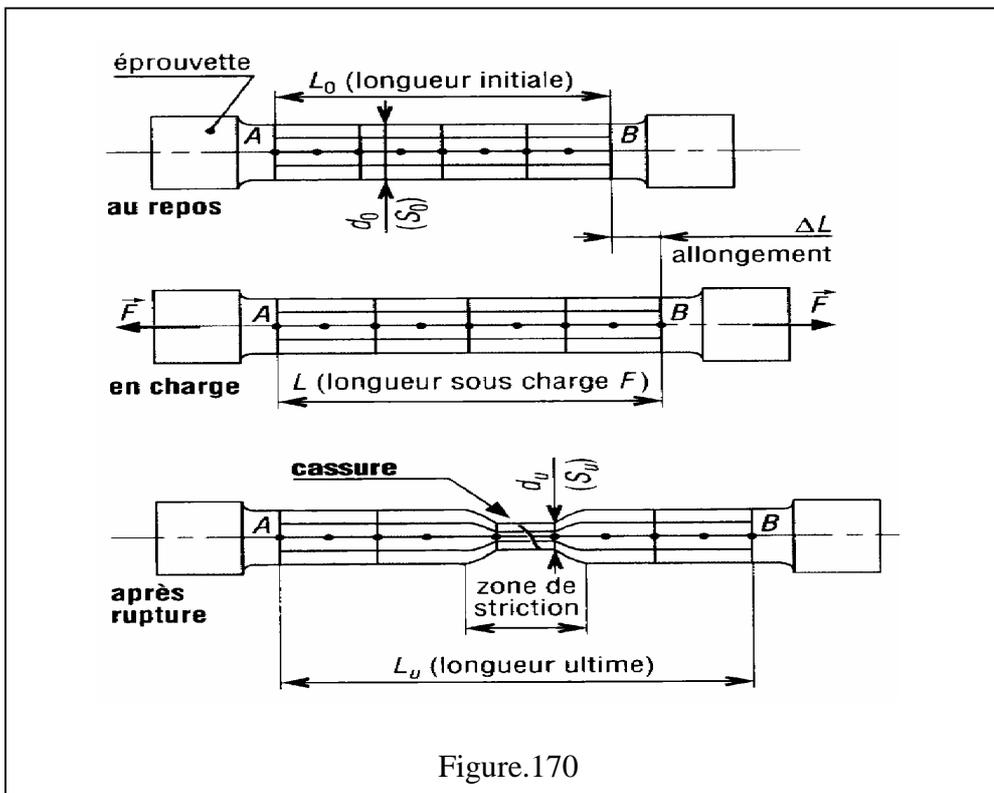
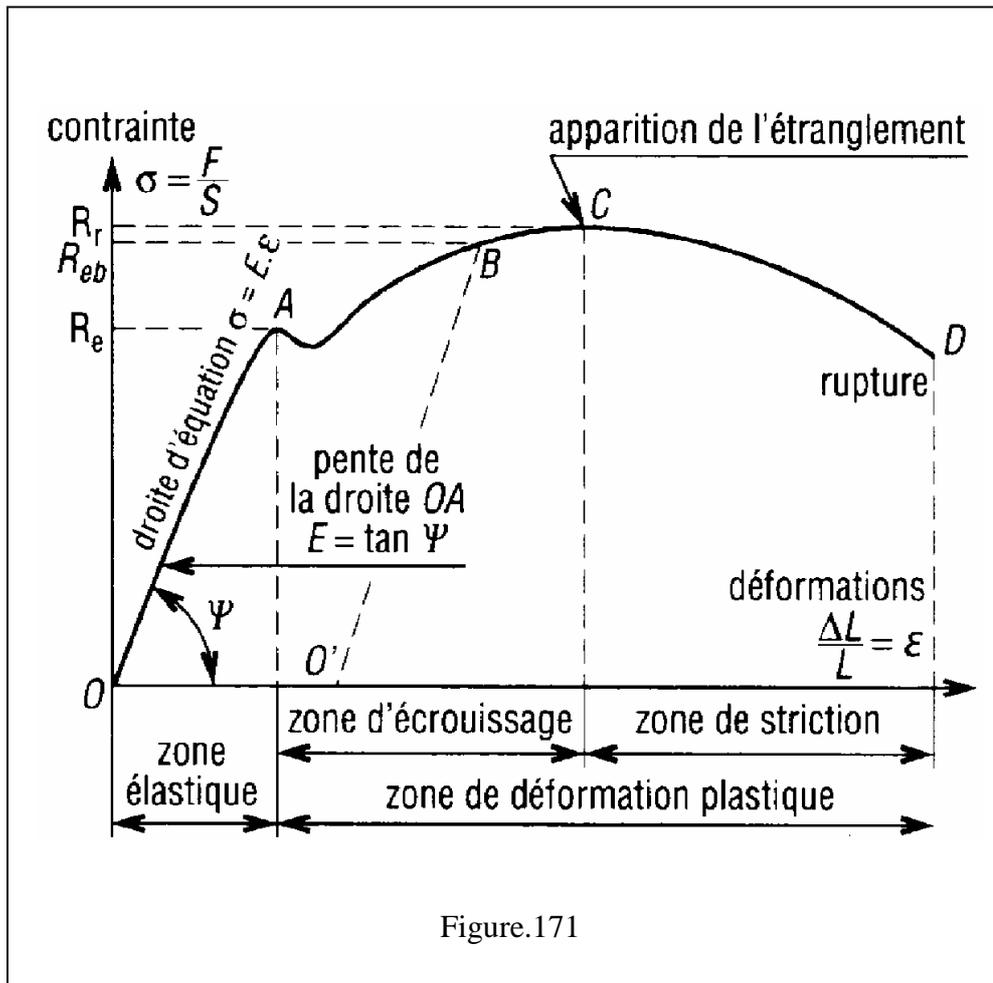


Figure.170



Module d'élasticité longitudinale E (N/mm²) ou Mpa

Il caractérise la pente de la droite de proportionnalité précédente et l'élasticité du matériau testé. Plus E est grand, plus le matériau est rigide et inversement.

Exemples : acier $\Rightarrow E = 200\ 000$ MPa et élastomère $\Rightarrow E = 1$ MPa.

Loi de Hooke $\sigma = E \cdot \varepsilon$

Cette loi, ou équation de la droite OA, traduit la proportionnalité : σ en MPa, E en MPa et ε sans unité).

Limite élastique Re (Mpa)

Elle marque la fin du domaine élastique (au point A). Pour les valeurs supérieures le matériau ne se déforme plus élastiquement mais plastiquement (l'éprouvette ne retrouve plus ses dimensions initiales après "déchargement", il subsiste un allongement permanent).

Limite conventionnelle d'élasticité Re 0,2 MPa

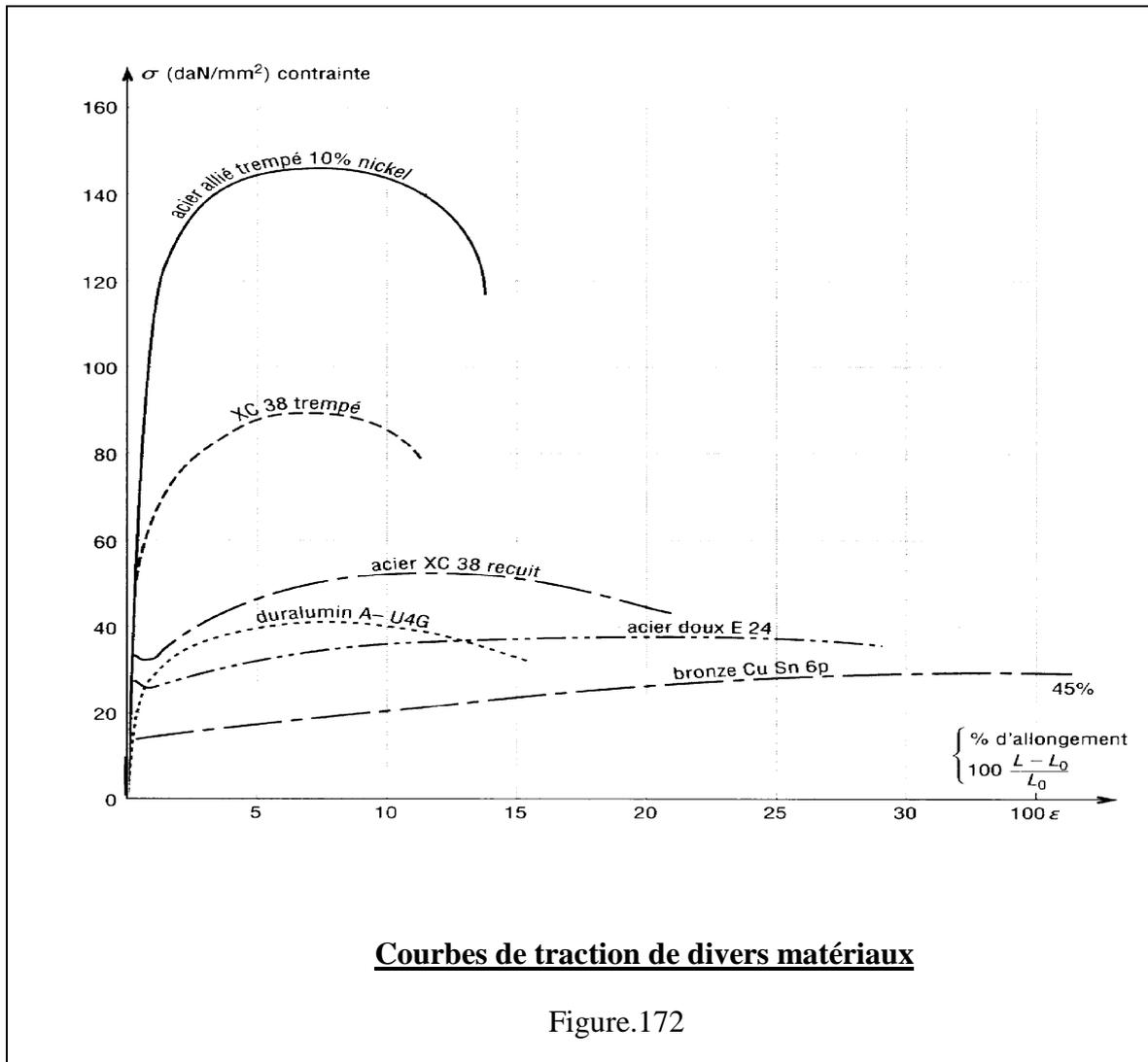
On utilise cette détermination pour les courbes de traction où le palier de fin de limite élastique n'apparaît pas nettement. Pour la mesure de Re on tolère une légère déformation permanente de 0,2% ($A\% = 0,2$).

Limite maximale Rm (Mpa)

C'est la contrainte maximale que peut supporter le matériau avant d'atteindre la zone de striction. Utilisée dans le calcul des organes de sécurité. Souvent appelée résistance à la rupture.

Phénomène d'écrouissage

Surtout employé en compression, il permet d'augmenter la limite élastique Re sans modifier la résistance à la rupture Rr. Dans un premier temps le matériau est déformé plastiquement avant point de striction, chemin OB. Au relâchement le "déchargement" se fait suivant la droite BO' parallèle à OA. Après remise en charge, la nouvelle courbe caractéristique du matériau est devenue O'BC avec Reb comme nouvelle limite élastique. figure.172



Caractéristiques de quelques matériaux

Aciers d'usage général

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
S 185 (A33)	290	185	190000
S 235 (E24)	340	235	190000
S 275 (E28)	410	275	190000
S 355 (E36)	490	355	190000

Aciers de construction mécanique

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
E 295 (A50)	470	295	200000
E 335 (A60)	570	335	200000
E 360 (A70)	670	360	200000

Aciers pour traitements thermiques

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
C 22 (XC 18)	410 à 980	255 à 600	210000
C 25 (XC 25)	460 à 690	285 à 370	210000
C 35 (XC 38)	570 à 830	335 à 490	210000
C 40 (XC 42)	620 à 880	355 à 520	210000
C 45 (XC 48)	660 à 930	375 à 580	210000
C 50 (XC 50)	700 à 980	395 à 600	210000

Aciers faiblement alliés

<i>Nuances</i>	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
48 Cr 2 (38 C 2)	600 à 900	350 à 550	210000
100 Cr 6 (100 C6)	850 à 1250	550 à 850	210000
13 Ni Cr 14 (14 NC 11)	800 à 1450	650 à 900	210000
20 Ni Cr Mo 7 (18 NCD 6)	800 à 1500	700 à 900	210000
36 Ni Cr Mo 16 (35 NCD 16)	1000 à 1750	800 à 1250	210000
34 Cr Mo 4 (35 CD 4)	700 à 1200	500 à 850	210000

Aciers fortement alliés

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
X 2 Cr Ni 19.11 (Z3 CN 19-11)	440 à 640	185	
X 6 Cr Ti 18.10 (Z6 CNT 18-10)	490 à 690	205	

Fontes

Nuances	Rr (MPa)	Re (MPa)	E (MPa)
EN GJL 200 (FGL 200)	200	130	100000
EN GJL 400 (FGL 400)	400	260	140000
EN GJS 500-7 (FGS 500-7)	500	320	168000
EN GJS 900-2 (FGS 900-2)	900	600	170000
EN GJMW 250-10 (MB 400-10)	400	220	170000
EN GJMB 350-10 (MN 350-10)	350	230	170000
EN GJMB 650-3 (MN 650-3)	650	430	170000

Nota : La nuance entre parenthèses correspond à l'ancienne norme de désignation des matériau

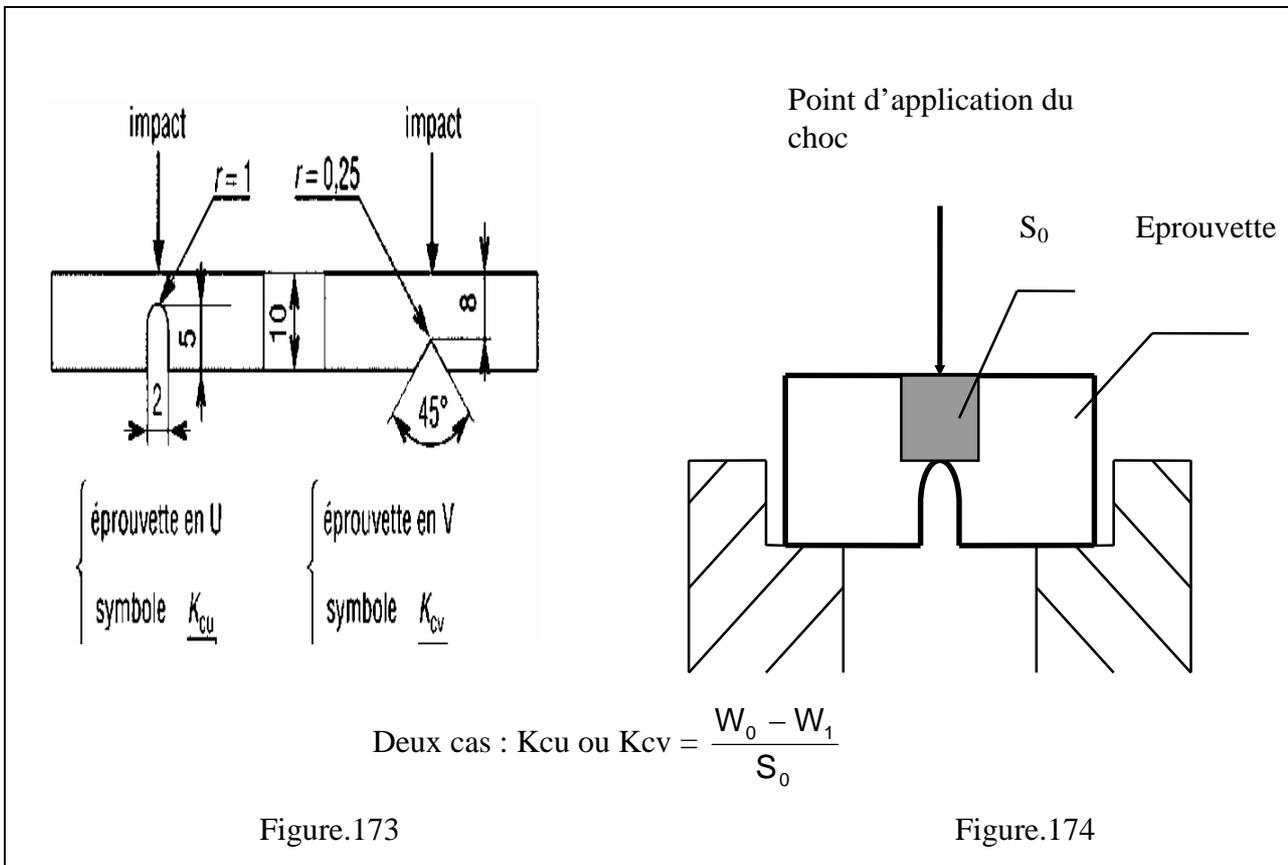
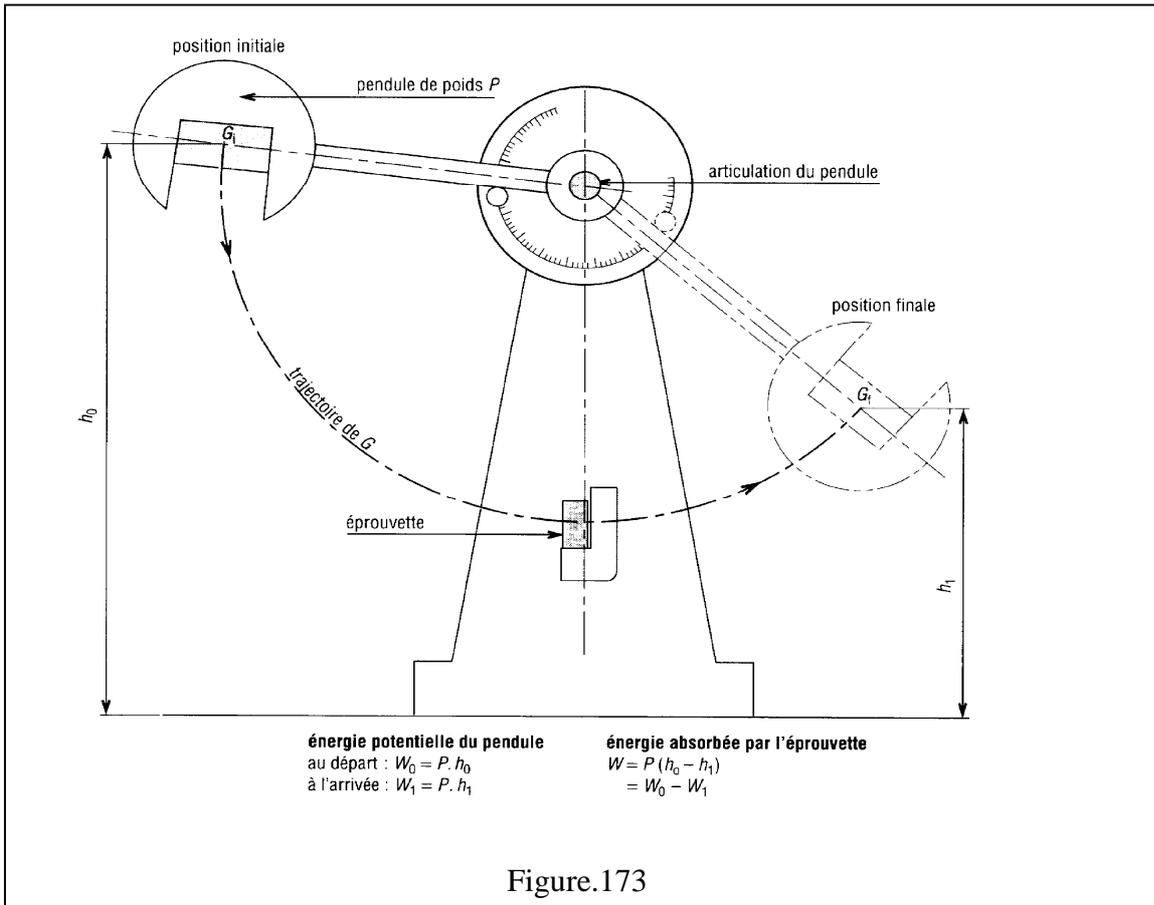
20.3.ESSAI DE RESILIENCE

La résilience, de symbole général K, caractérise la capacité d'un matériau à absorber les chocs sans se rompre. Ce risque est amplifié aux basses températures. Elle est mesurée sur des machines du type Charpy (éprouvette sur deux appuis) ou Izod (éprouvette encastrée).figures.173, 174 et 175

L'essai, qui est un essai **comparatif** entre matériaux, mesure l'énergie qu'il faut fournir à un pendule pesant pour briser une éprouvette entaillée du matériau à tester.

L'énergie absorbée par l'éprouvette (W) est égale à la différence des énergies potentielles du pendule entre le début ($W_0 = P \cdot h_0$) et l'arrivée($W_1 = P \cdot h_1$) $W = P \cdot h_0 - P \cdot h_1 = P (h_0 - h_1)$

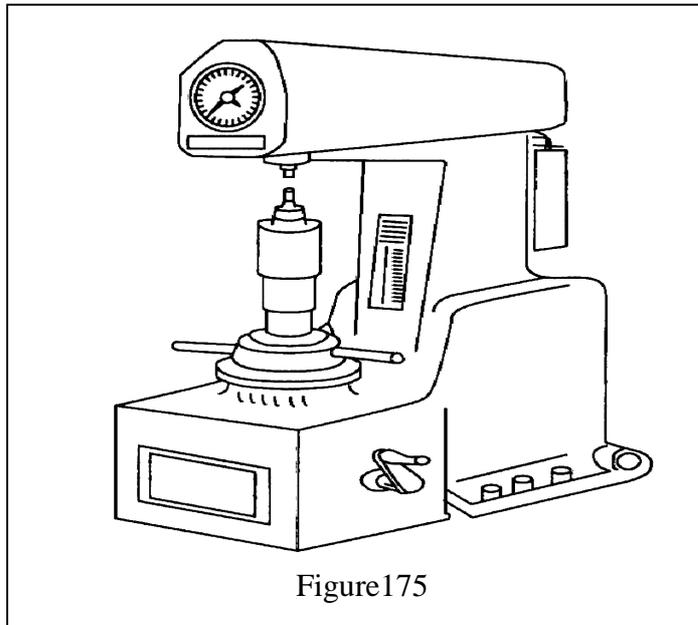
La résilience est égale au rapport de W sur l'aire de la section au droit de l'entaille.



20.4.ESSAI DE DURETE

La dureté, de symbole général H, caractérise la capacité d'un matériau à résister au marquage (empreintes, rayures. . .), à l'usure et à l'érosion. Figure.175

Elle peut être évaluée en mesurant une empreinte laissée en surface par un poinçon agissant sous l'action d'une force connue (essais Brinell, Vickers et Rockwell) mais aussi par une hauteur de rebondissement d'un objet très dur sur la surface à tester (essai Shore pour élastomères et plastiques).



Dureté Brinell (symbole HB)

Elle est obtenue par calcul. Après essai, on mesure l'empreinte laissée par une bille polie (diamètre : 1-2,5-5-10 mm) et la valeur de la charge F appliquée pour obtenir cette empreinte (essai usuel : F = 3 000 daN, d = 10 mm, pendant 15 à 60 secondes). Utilisation : tous métaux. Figure.176

$$HB = \frac{F}{10\pi \left(5 - \sqrt{25 - \frac{d_2}{4}} \right)}$$

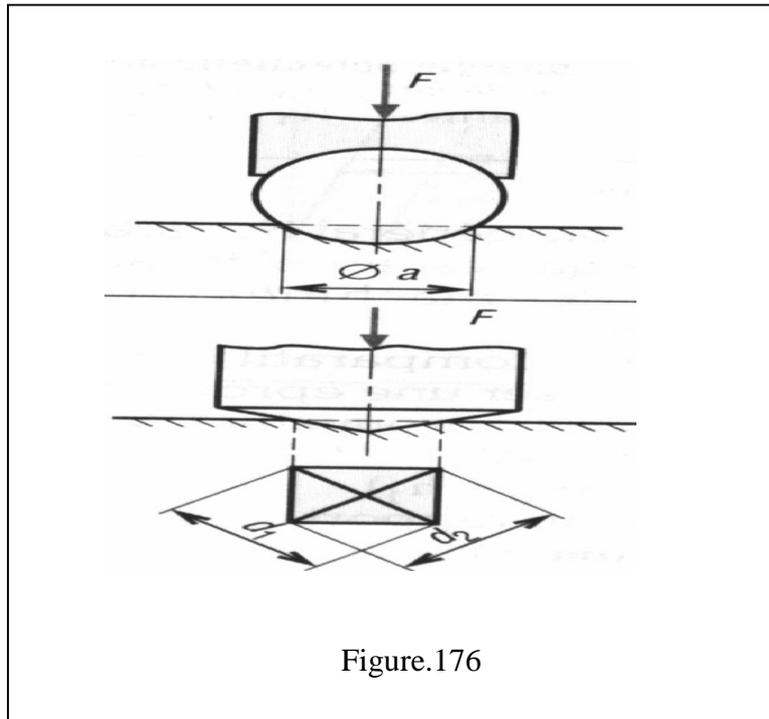


Figure.176

Dureté Vickers (symbole HV)

Elle est obtenue par calcul ; le principe est identique au précédent mais avec une pyramide droite en diamant à base carrée dont l'angle au sommet est de 136° . Utilisation : tous métaux.

$$HV = \frac{0.189 \times F}{d^2} \quad \text{tel que } d=d_1+d_2$$

Variante : essai Knoop (microdureté, empreinte en forme de losange, matériaux durs pour petites pièces et pièces à sections fines).

Dureté Rockwell (symbole HR)

C'est l'essai de dureté le plus connu mondialement. Dans ce cas, la dureté, contrairement à Brinell et Vickers, est obtenue par lecture directe d'une longueur d'enfoncement d'un pénétrateur bille acier ou cône diamant.

Une précharge (F_0) permet de faire une empreinte initiale et, par-là, d'éliminer les incertitudes propres aux défauts de la surface.

ESSAI DE FLUAGE

Définition

Le fluage est la déformation continue des objets, avec le temps, sous l'action d'efforts appliqués constants.

Essai

C'est un essai de traction, à chaud ou non, souvent de très longue durée (milliers d'heures). La rupture par fluage se produit, après un temps long, sous des charges constantes bien inférieures à limites usuelles du matériau (R_r ou R_e). Ce phénomène est observé dans les systèmes travaillant pendant de longues durées (10, 20 ans...) ou dans les machines travaillant à températures élevées, comme les chaudières, les moteurs d'avion ou les aubes de turbine.

La chaleur accentue fortement le phénomène. Certains matériaux (matières plastiques...) sont sensibles au fluage à température ambiante.

ESSAI DE FATIGUE OU D'ENDURANCE

Phénomène de fatigue

Il est de première importance sur les structures d'avions et dans de nombreux autres domaines (roulements, engrenages, arbres de transmission...). Une roue de voiture mal équilibrée est un exemple de système soumis à un phénomène de fatigue, un effet de résonance peut l'amplifier.

La rupture peut se produire, après un certain nombre de cycles ou allers et retours, sous des efforts bien inférieurs aux limites usuelles du matériau (R_r et R_e).

Essai de fatigue

C'est un essai statistique dans la mesure où des éprouvettes identiques, sous les mêmes conditions d'essai, donnent des résultats différents. Il y a une répartition statistique des résultats autour d'une valeur moyenne ou médiane. Cette valeur moyenne, une fois déterminée est choisie comme représentative de la capacité du matériau (analogie avec la durée de vie des roulements). Il y a trois types d'essais de fatigue : traction compression, torsion alternée et flexion alternée (le plus classique) et flexion pure alternée M_f .

Courbes d'endurance figure.177

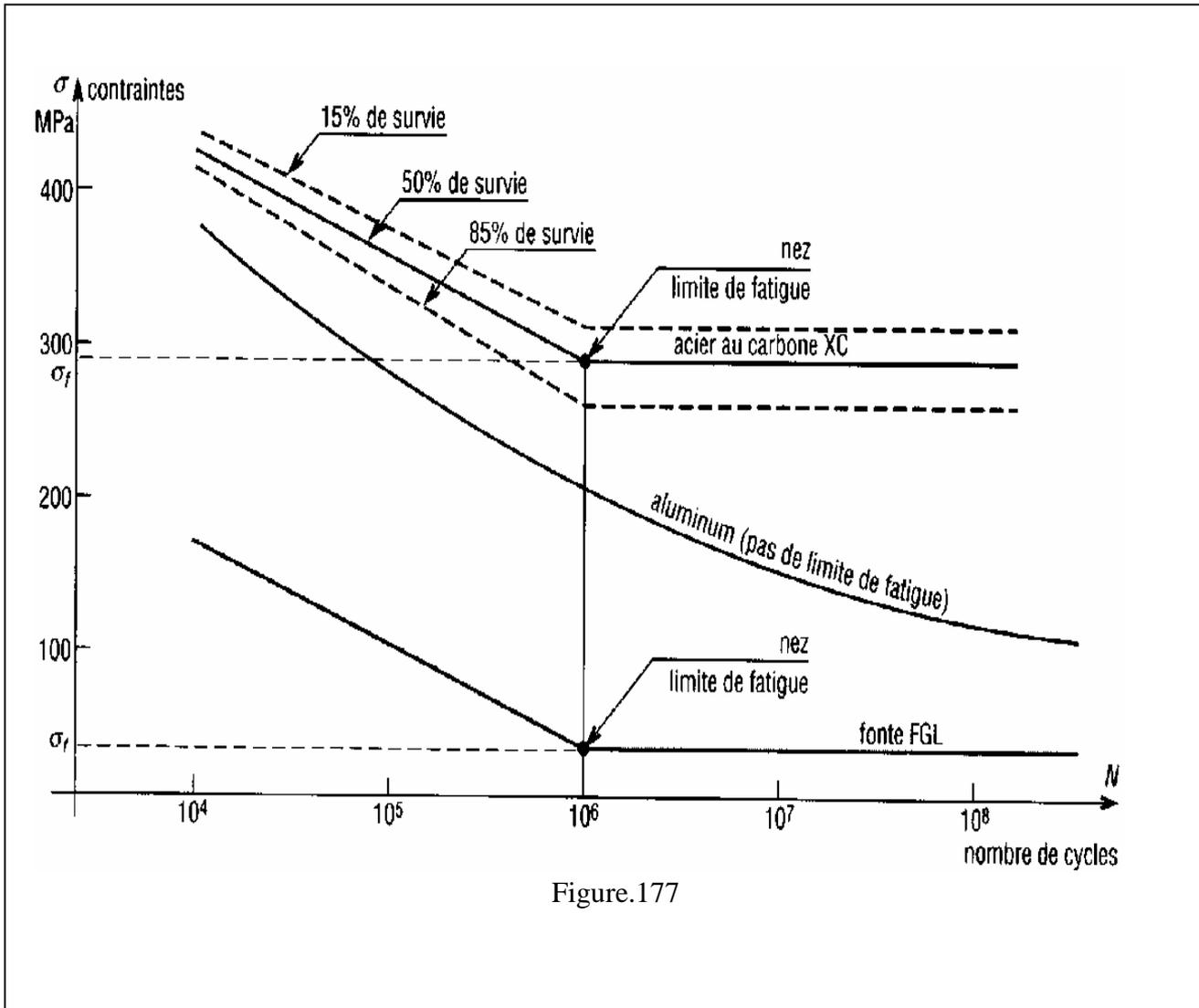


Figure.177

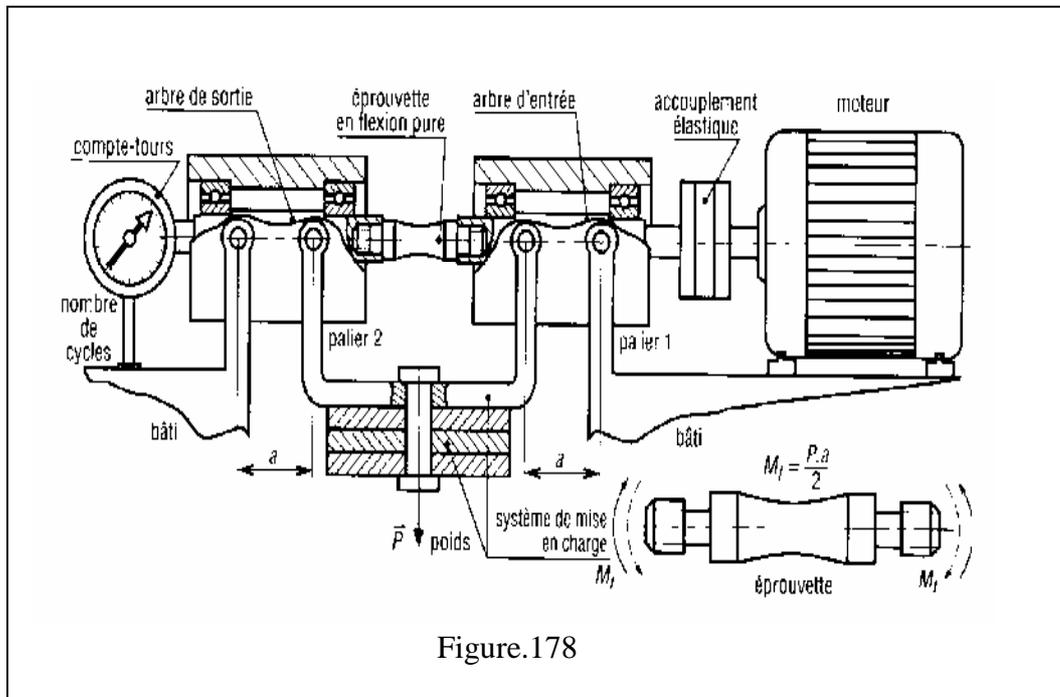
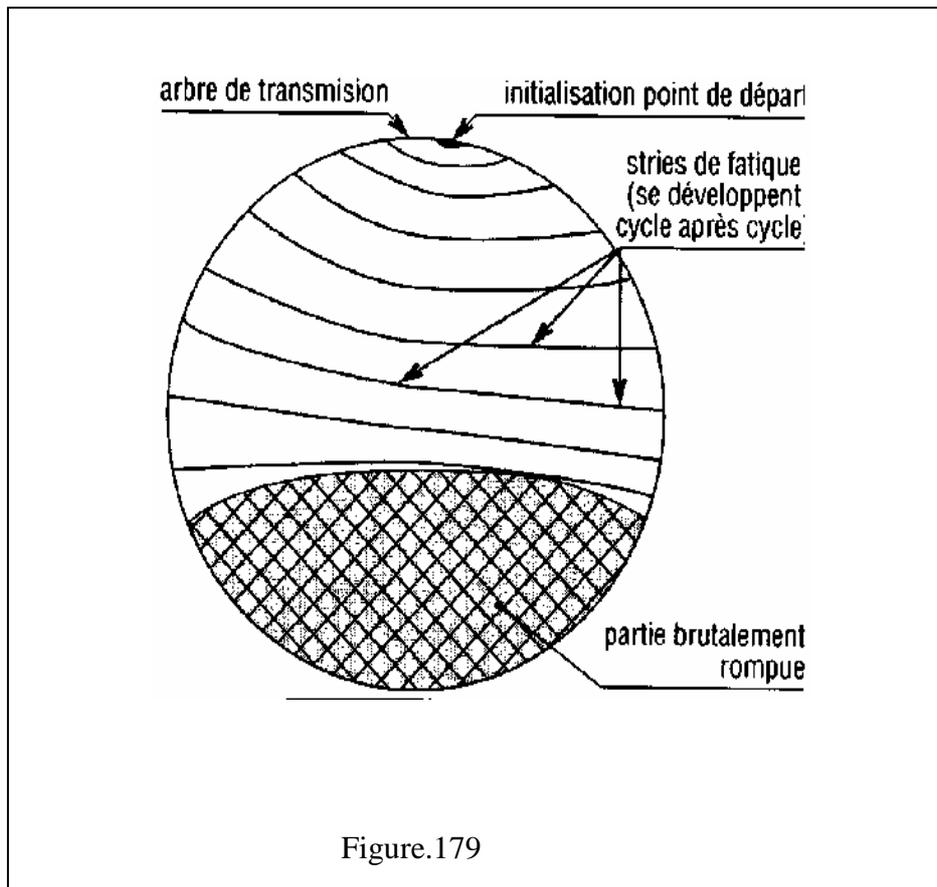


Figure.178

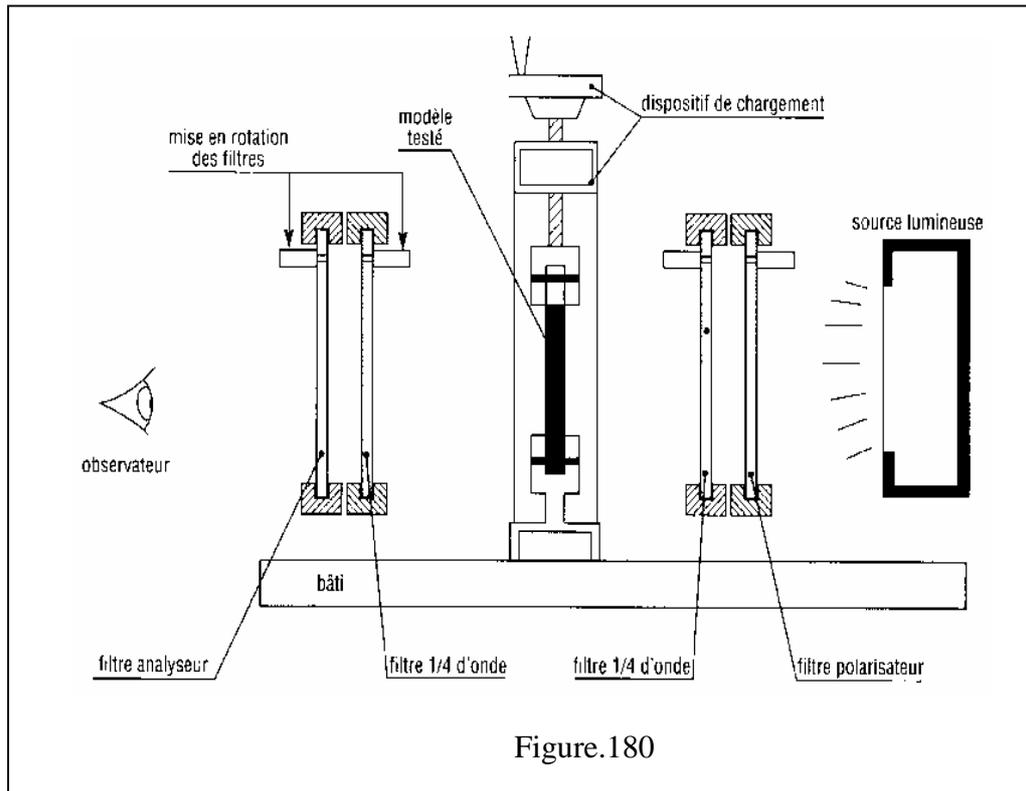
Les fissures de fatigue démarrent à partir des imperfections en surface soit :

Rayures, empreintes, stries d'usinage, arête de filetage, hétérogénéité due au traitement thermique, défauts du réseau cristallin...Après amorce, la fissure s'agrandit sous l'action des efforts alternés qui écartent et rapprochent continuellement les parties fissurées ; il y a un phénomène de concentration de contraintes en ces points.La rupture définitive se produit brutalement lorsque les dimensions de la partie non encore fissurée ne sont plus suffisantes pour supporter les charges exercées. Figure.179



Projetés sur la surface à étudier comme un aérosol, ils sont utilisés pour localiser visuellement les zones les plus chargées et indiquer les directions principales des déformations.

Ils permettent de choisir les emplacements de collage des jauges de contraintes et leur orientation ; l'orientation des craquelures est toujours perpendiculaire à la direction de la déformation en traction la plus importante. Figure.180



METHODES PHOTOELASTIQUES

Plus précises que les vernis craquelant, ces méthodes permettent des études plus détaillées sur les zones les plus chargées, les directions principales des déformations par exemple. Les résultats sont particulièrement intéressants près des formes amenant des concentrations de contraintes (trous, encoches, épaulements...).

Une matière plastique transparente est utilisée pour modéliser l'objet réel. Un système optique spécial (polariscope), permet d'observer des motifs colorés, interpréter et visualiser les zones de contraintes. Il est ainsi possible, par dessins et essais successifs, d'améliorer la définition des objets. Figure.181

Les pièces soumises à des vibrations ou des charges dynamiques peuvent être étudiées avec un système stroboscopique.

L'étude dans les trois dimensions est envisageable par tranches découpées dans des modèles 3D "figés".

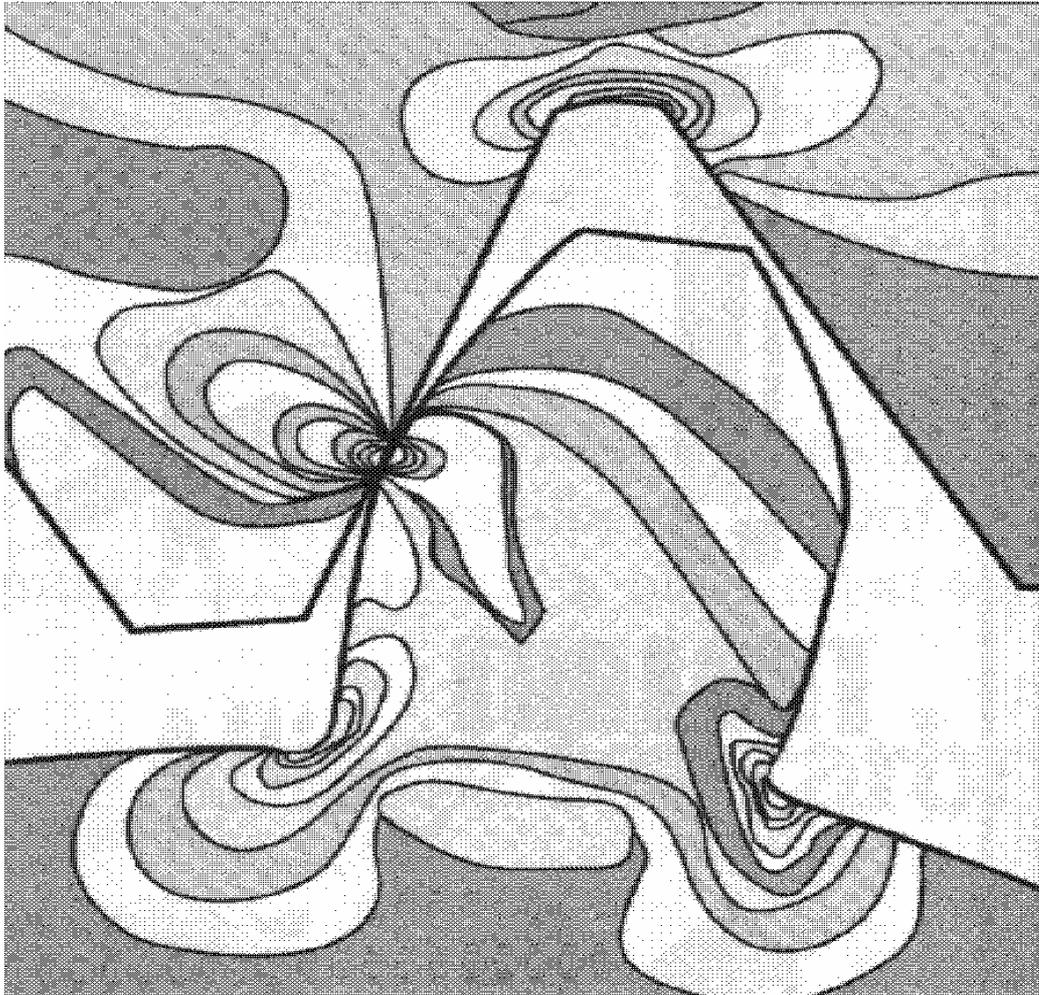


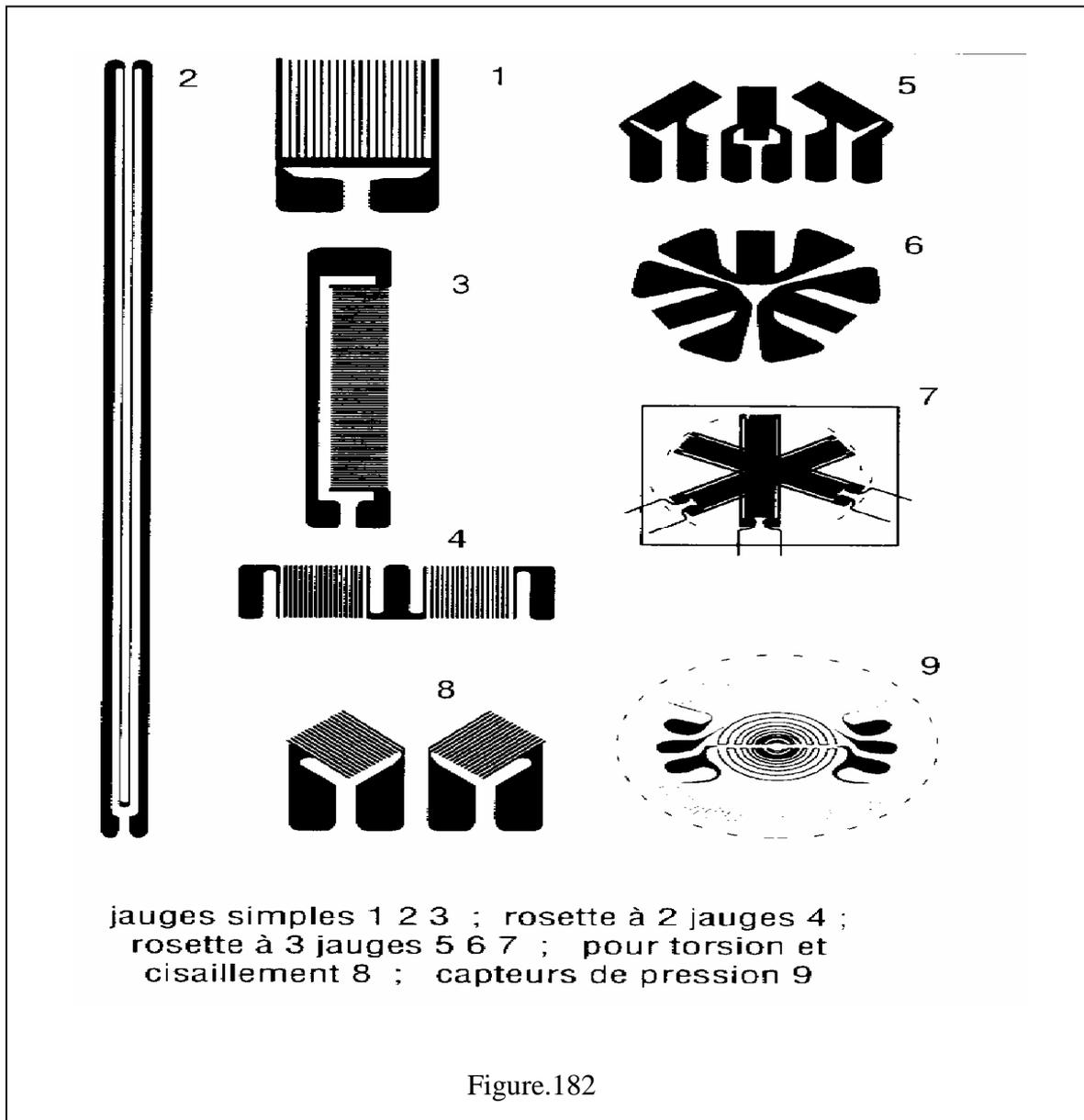
Figure.181

EXTENSOMETRIE ELECTRIQUE

Principe

Elle est basée sur l'emploi des **jauges de contraintes**. C'est la méthode expérimentale la plus usuelle pour vérifier les résultats théoriques (calculs de contraintes, de déformations...).

Les jauges sont collées sur la surface à étudier et mesurent les déformations en un point donné. La déformation subie est transformée en variation de résistance électrique mesurée par un pont d'extensométrie, c'est le principe du pont de Wheatstone. Les contraintes sont ensuite obtenues par calcul à partir des lois de la résistance des matériaux ou élasticité. Figure.182



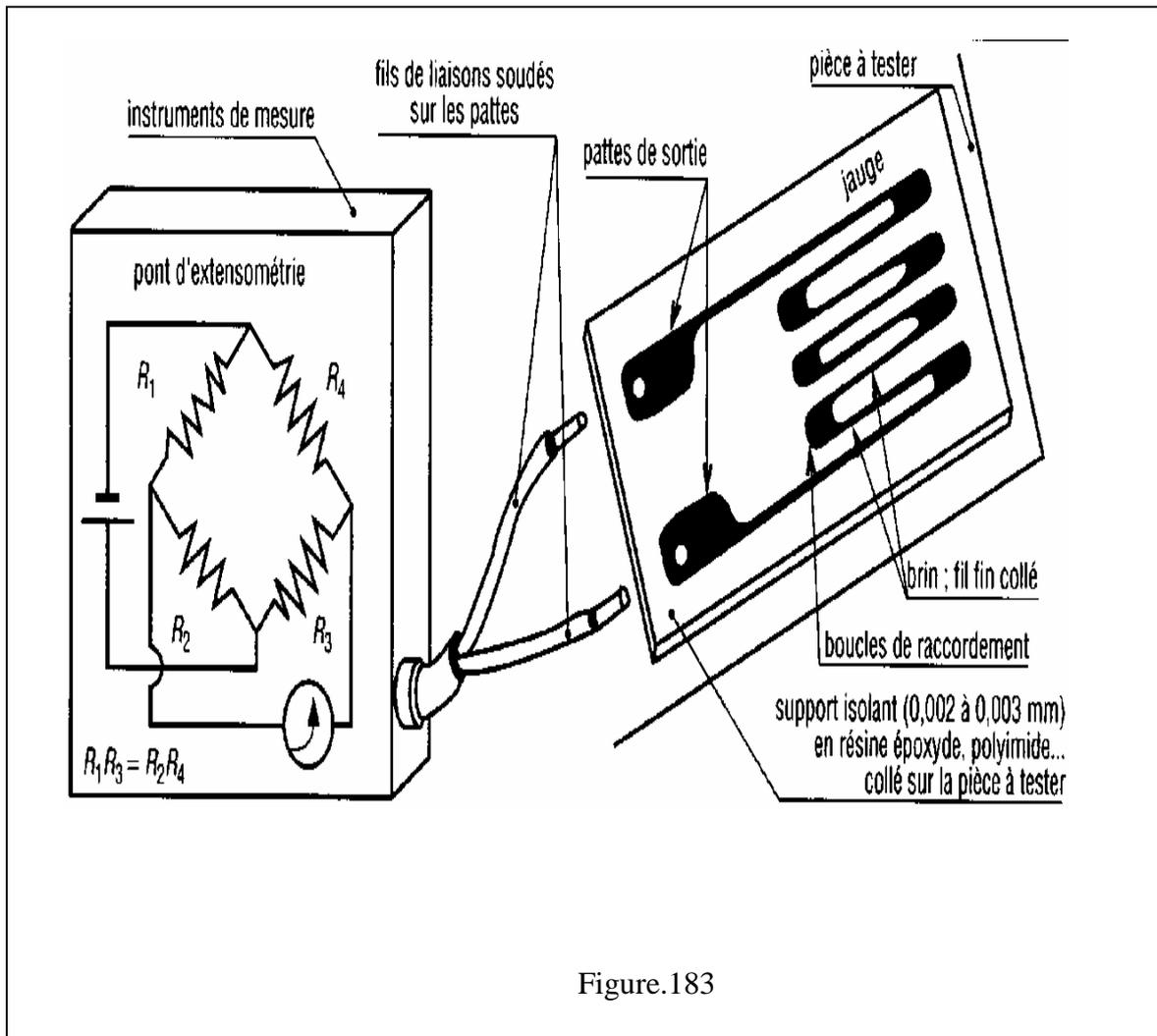
Essai

Sous l'effet d'un allongement la section du brin (fil) de la jauge diminue, il en résulte une variation de la résistance électrique du fil. En mesure, R1, est une jauge active collée sur la structure et R2, une jauge identique collée sur une pièce de même matière. R2, ne subit aucune contrainte et est à la même température que R1. figure.183

Dans certains capteurs (forces, pressions, couples, déplacements...) on utilise généralement quatre jauges judicieusement disposées.

Une jauge peut servir très longtemps, cependant il n'est pas possible de la décoller sans la détruire.

Elles sont souvent fabriquées de la même manière que les circuits imprimés et sont disponibles dans plusieurs formes et dans de nombreuses dimensions (0,1 mm à 10 cm et plus).



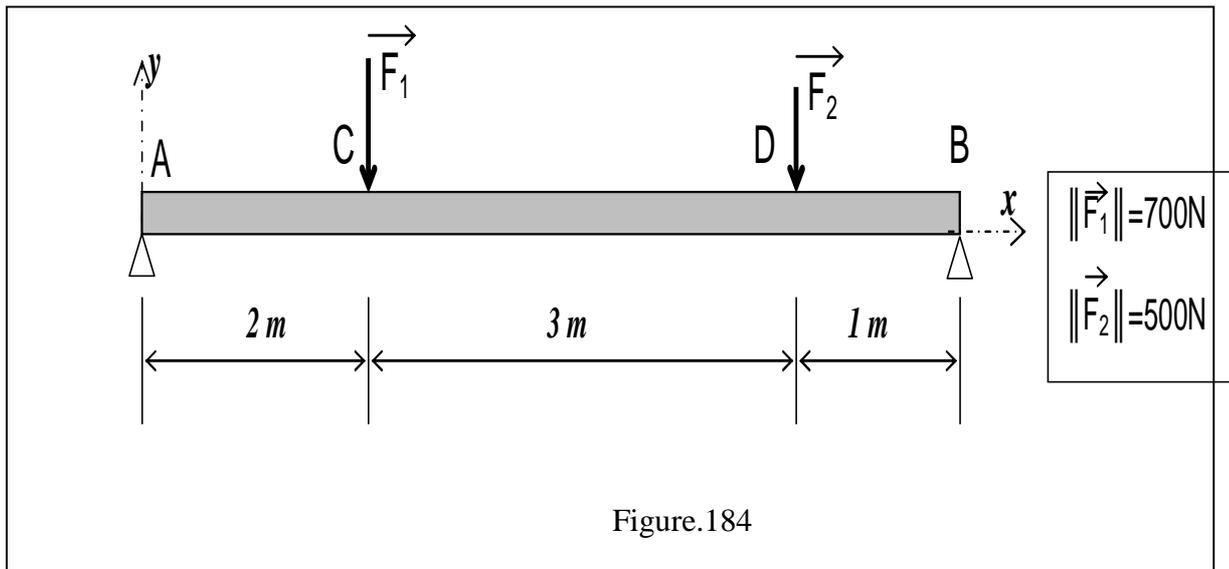
21.TP ELEMENTS FINIS FLEXION

POSITION DE L'ETUDE

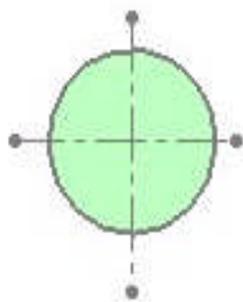
■ nous allons reprendre l'étude vue en cours de Rdm (flexion) par l'utilisation d'un logiciel d'éléments finis interfacé avec Solid Works (Cosmosworks). L'objectif du TP est :

- de découvrir le logiciel,
- de devenir capable de régler certains paramètres,
- de devenir capable d'exploiter les résultats qu'il fournit.

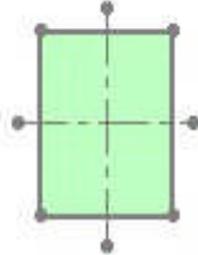
Rappel du système étudié : figure.184



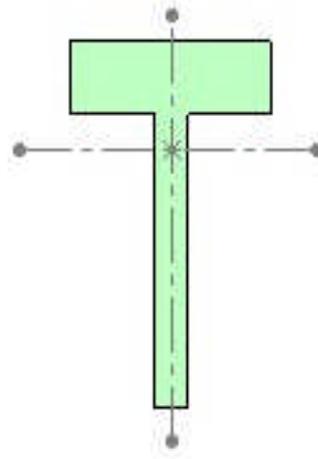
Résultats RDM concernant la contrainte maxi pour chaque type de section considéré : Fig.185



$\sigma_{\max} = 89 \text{ MPa}$



$\sigma_{\max} = 66 \text{ MPa}$



$\sigma_{\max} = 46 \text{ MPa}$

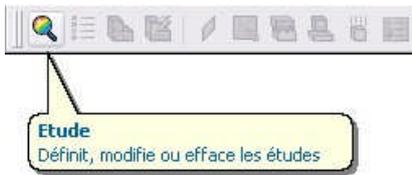
Figure.185

PREPARATION DU CALCUL ELEMENTS FINIS :

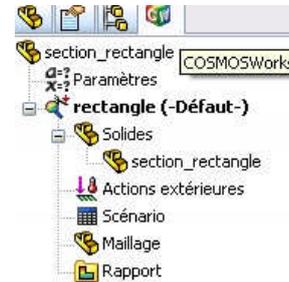
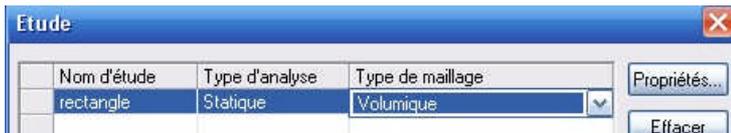
- *Lancer SolidWorks.*
- *Ajouter le complément Cosmosworks, par Outils/Compléments/Cosmosworks.*
- *Ouvrir le fichier Section_rectangle.sldprt.*

Ouverture d'une étude éléments finis :

- Débuter une nouvelle étude en cliquant sur l'icône correspondante. L'onglet CosmosWorks apparaît.



- Donner un nom à l'étude, et spécifier que l'analyse sera statique avec maillage volumique.



Réglages des conditions aux limites :



- Définir les déplacements imposés (ici aux deux faces extrémités de la poutre)

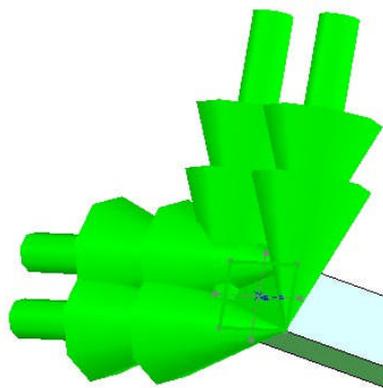


Sélectionner une face extrémité de la poutre.

Choisir le type de déplacement : utiliser une géométrie de référence).

Empêcher les translations suivant y et z.

Renouveler l'opération pour l'autre extrémité.



- Déclarer les efforts extérieurs :





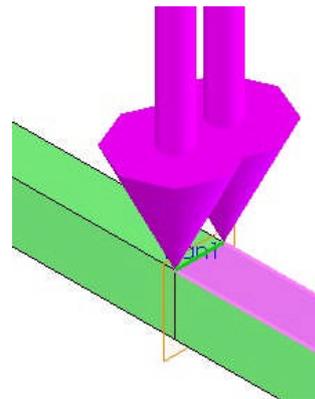
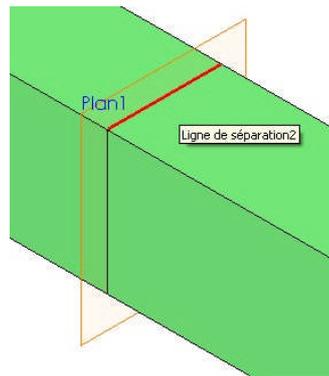
Sélectionner l'arête qui supporte l'effort (ligne de séparation)

Déclarer la direction de l'effort (par le plan perpendiculaire à l'effort)

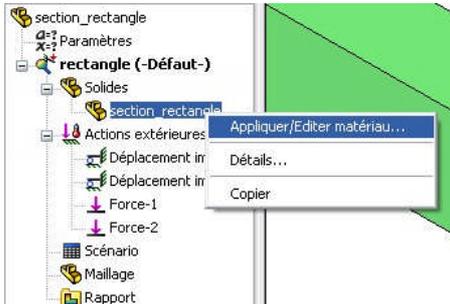
Donner son intensité

Renouveler l'opération pour le second effort

Résultat :



• Régler le matériau



à partir de fichiers de bibliothèque/ steel / alloy steel

LANCEMENT DU CALCUL

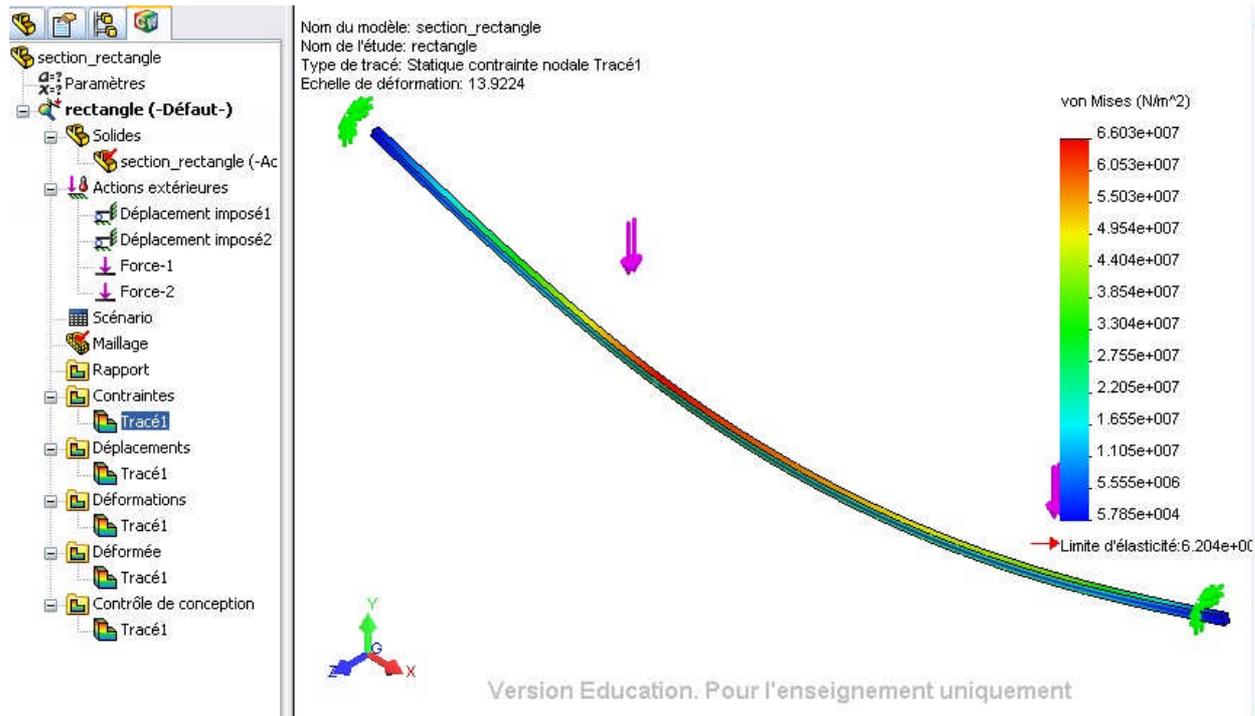
Cliquer sur l'icône correspondante, l'aboutissement du calcul sera signalé par une fenêtre.

EXPLOITATION DES RESULTATS :

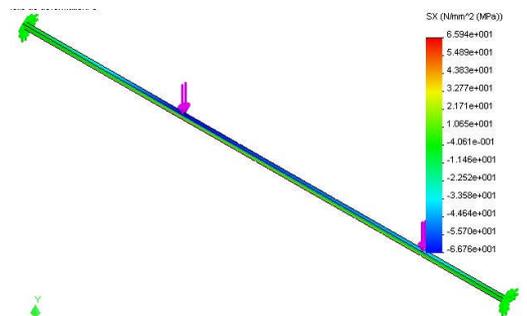
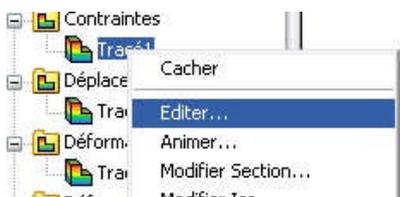
Cosmosworks fournit des résultats concernant :

- ◇ Les contraintes
- ◇ Les déplacements
- ◇ Les déformations
- ◇ La déformée
- ◇ Le contrôle de conception

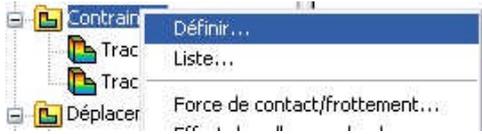
Etude des contraintes : Le logiciel fournit un tracé de chaque grandeur physique (bouton de droite montrer)



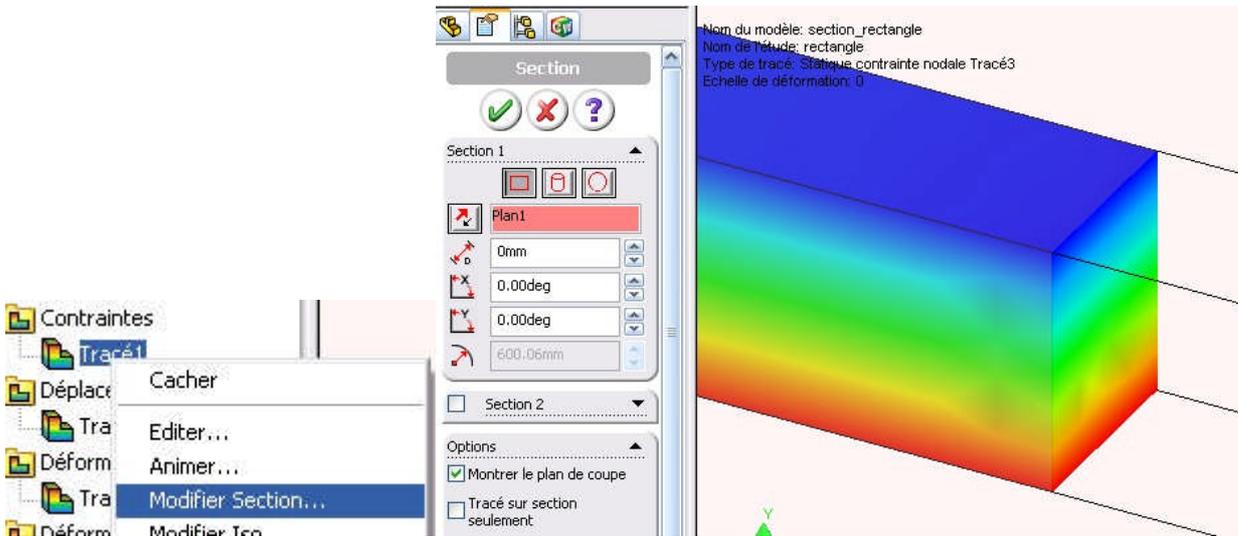
Par défaut il superpose déformée et contrainte, il est possible de n'afficher que les contraintes, et de régler le type de contrainte à visualiser :



Il est possible de **créer plusieurs tracés de contraintes** (permettant de visualiser les résultats différents) :



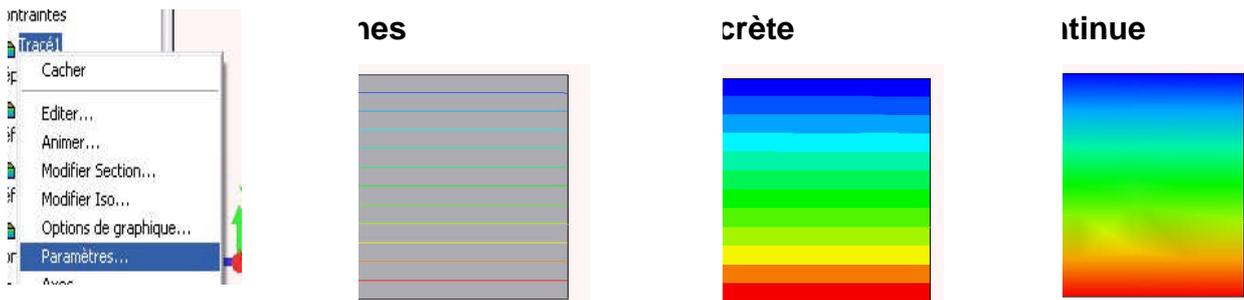
Et il est possible pour un tracé donné, de **visualiser les contraintes définies dans UNE section** :



Pour faciliter l'observation : se mettre normale à la section, cacher les déplacements imposés et les efforts.

Contraintes/ tracé 1/ bouton droit/ montrer.

Apparence de la contrainte : Les nappes de contraintes peuvent être tracées de différentes façons :



Vous réaliserez l'étude pour les trois fichiers SW : section_circulaire, section_rectangle, et section_enT

En visualisant la contrainte normale en MPa dans la section de l'effort de 700 N. Appeler le professeur.

Puis utiliser les copies d'écran page 5 pour tracer pour chaque nature de section, la répartition des contraintes en fonction de y. Utiliser la même échelle de contrainte SVP.

Comparer les deux modèles éléments finis et RdM sur cet exemple :

.....
.....
.....

Evaluation de la flèche En observant ce que Cosmosworks fournit parmi les résultats de déformations, déplacements, déformée, déterminer la flèche de la poutre pour chaque section (chercher le déplacement maxi en y).

Flèche de la poutre		
Section circulaire	Section rectangulaire	Section en T
.....
.....

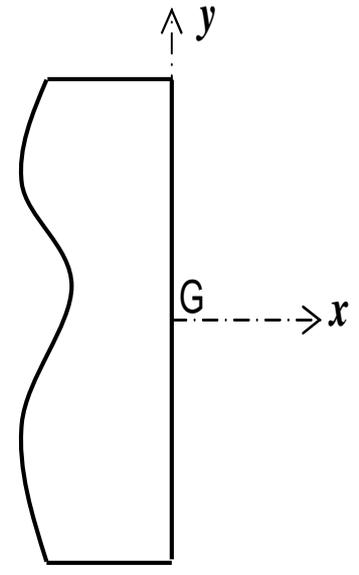
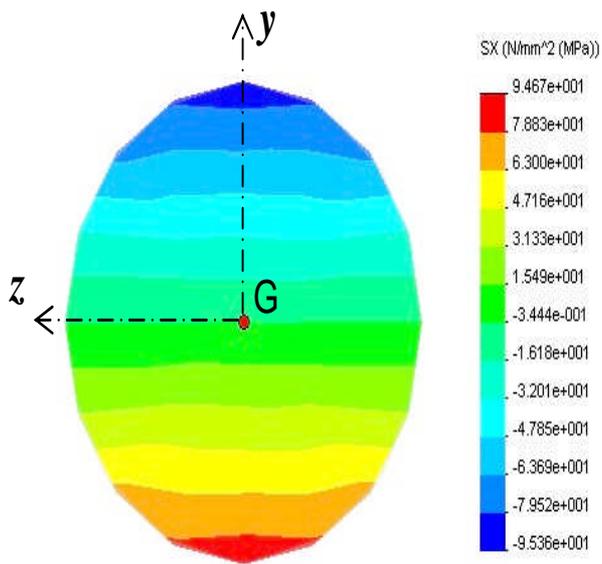
Contrôle de conception

Visualiser les résultats relatifs au contrôle de conception. Donner une explication sur le type d'indication fournie :

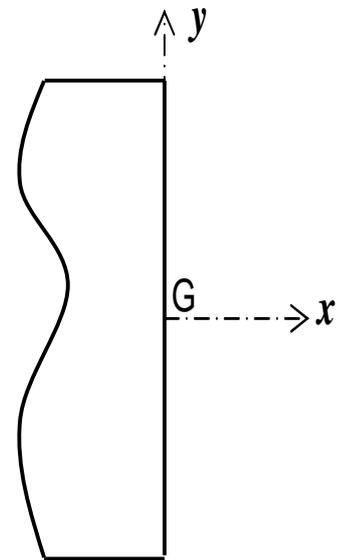
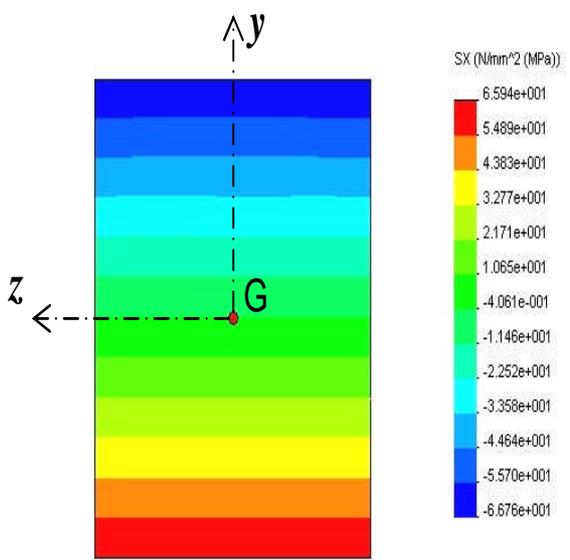
.....
.....
.....
.....
.....
.....

REPARTITION DES CONTRAINTES DANS LA SECTION

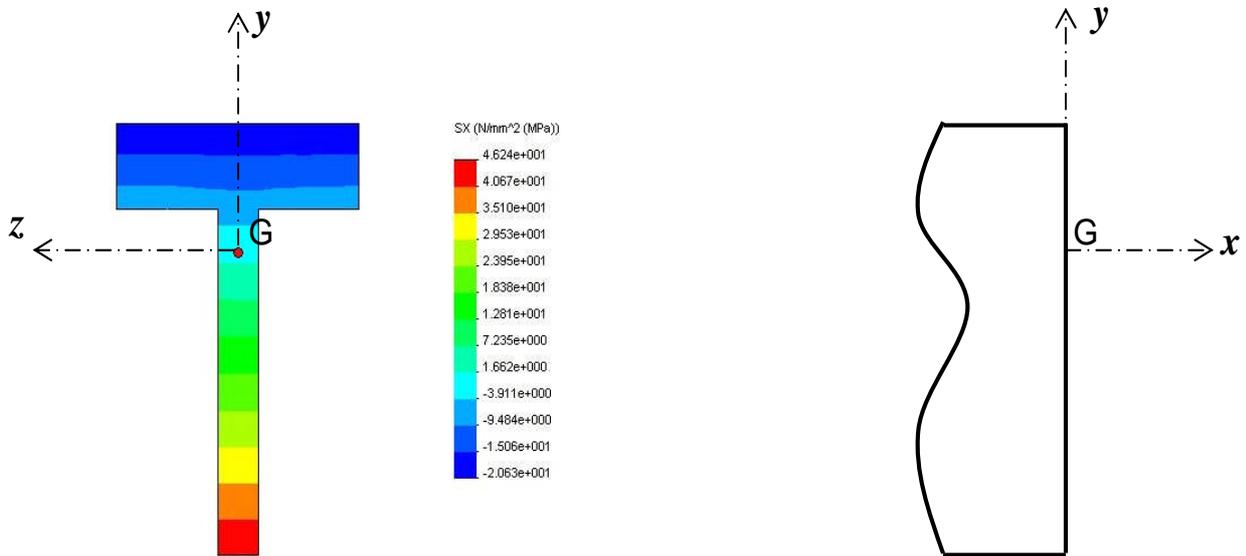
poutre à section circulaire :



poutre à section rectangulaire :



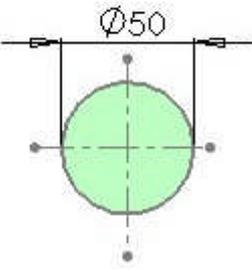
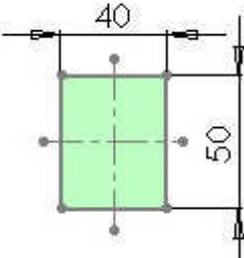
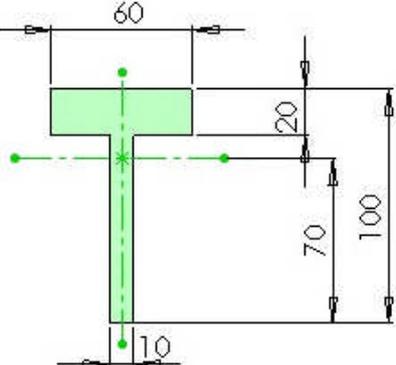
poutre à section en T :



POSITION DU PROBLEME

Soit une poutre subissant un moment de torsion $M_t = 5000 \text{ N.m}$

On considèrera trois géométries de section possibles, mais ayant la même aire.

Section circulaire	Section rectangulaire	Section en T
		
$I_o = \frac{\pi D^4}{32}$	$I_o = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$	$I_o = 2033333 \text{ mm}^4$

TRAVAIL DEMANDE

Pour chaque type de section :

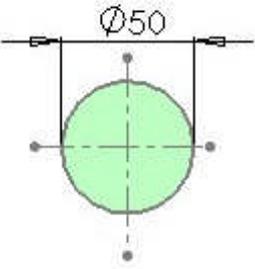
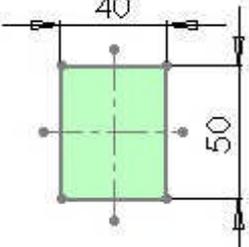
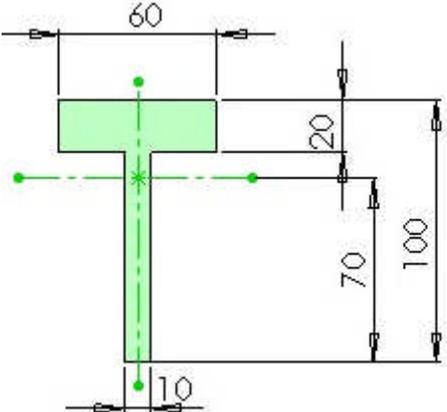
- Calculer le moment quadratique I_0 s'il n'est pas donné,

Section circulaire	Section rectangulaire	Section en T
		$I_0 = 2033333 \text{ mm}^4$

- Calculer la valeur de cette contrainte tangentielle en fonction de ρ .

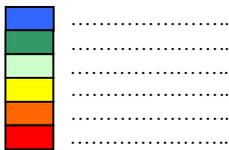
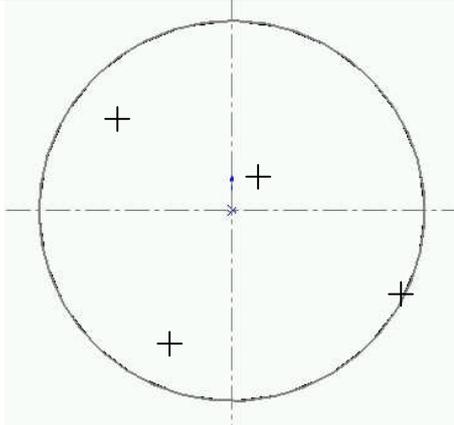
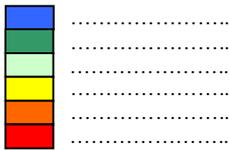
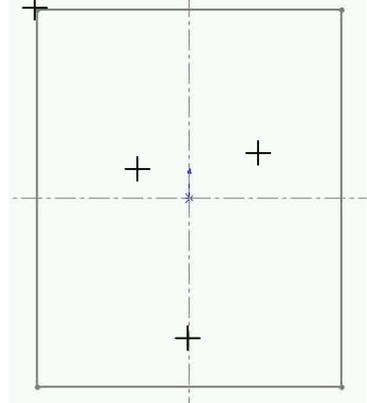
Section circulaire	Section rectangulaire	Section en T

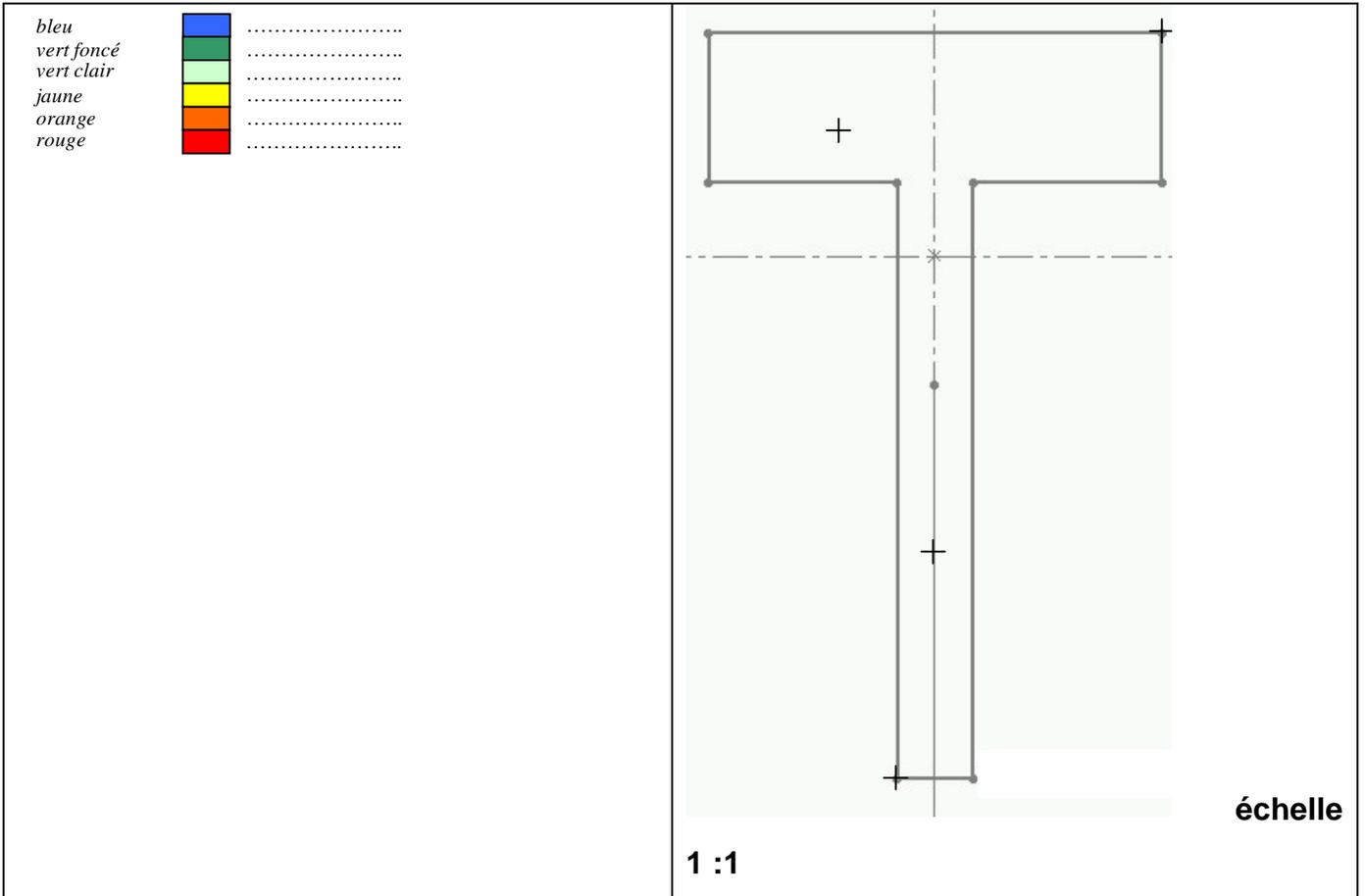
- Calculer la contrainte maximale et indiquer au stylo rouge, le où les lieux de cette contrainte

Section circulaire	Section rectangulaire	Section en T
		

Dans le tableau page 2, pour chaque section :

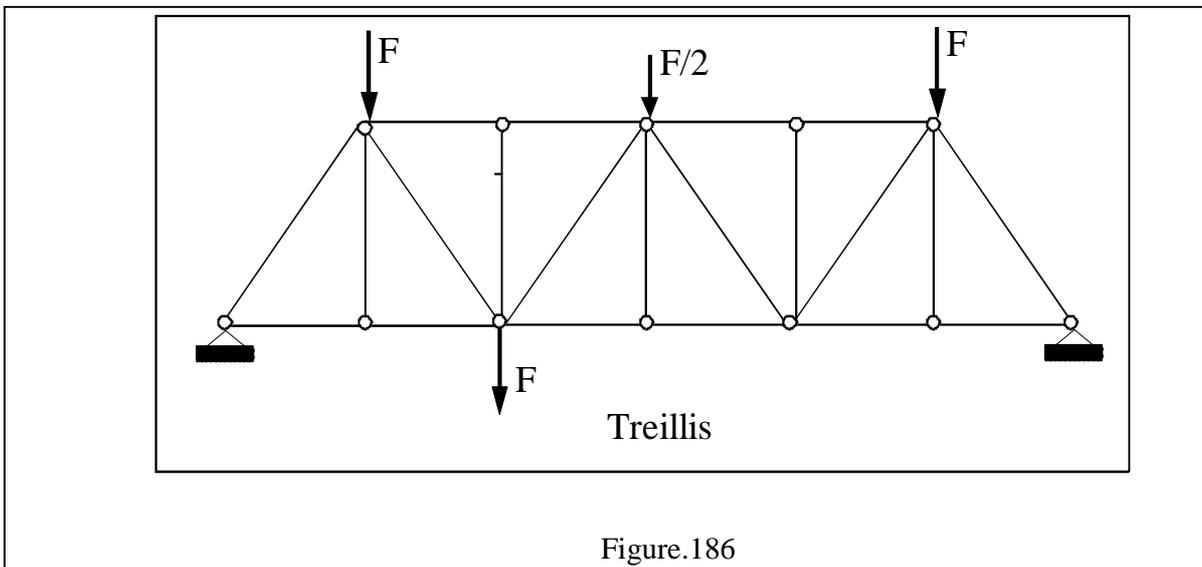
- Déterminer le rayon maximal.
- Dessiner la nappe de contrainte tangentielle, en créant 6 niveaux de contraintes d'égale largeur ($1/6$ de τ_{max}).
- Tracer le vecteur contrainte tangentielle pour les points indiqués par une croix (mesuré ρ sur le dessin). Pour cela on considérera que la poutre est toujours soumise à un moment de torsion de sens horaire.

<p>$\rho_{\max} =$</p> <p>$\tau_{\max} =$</p> <p>échelle de répartition des contraintes tangentielles</p> <p> <i>bleu</i> <i>vert foncé</i> <i>vert clair</i> <i>jaune</i> <i>orange</i> <i>rouge</i> </p> 	 <p>échelle 1 :1</p>
<p>$\rho_{\max} =$</p> <p>$\tau_{\max} =$</p> <p>échelle de répartition des contraintes tangentielles</p> <p> <i>bleu</i> <i>vert foncé</i> <i>vert clair</i> <i>jaune</i> <i>orange</i> <i>rouge</i> </p> 	 <p>échelle 1 :1</p>
<p>$\rho_{\max} =$</p> <p>$\tau_{\max} =$</p> <p>échelle de répartition des contraintes tangentielles</p>	



Application aux treillis

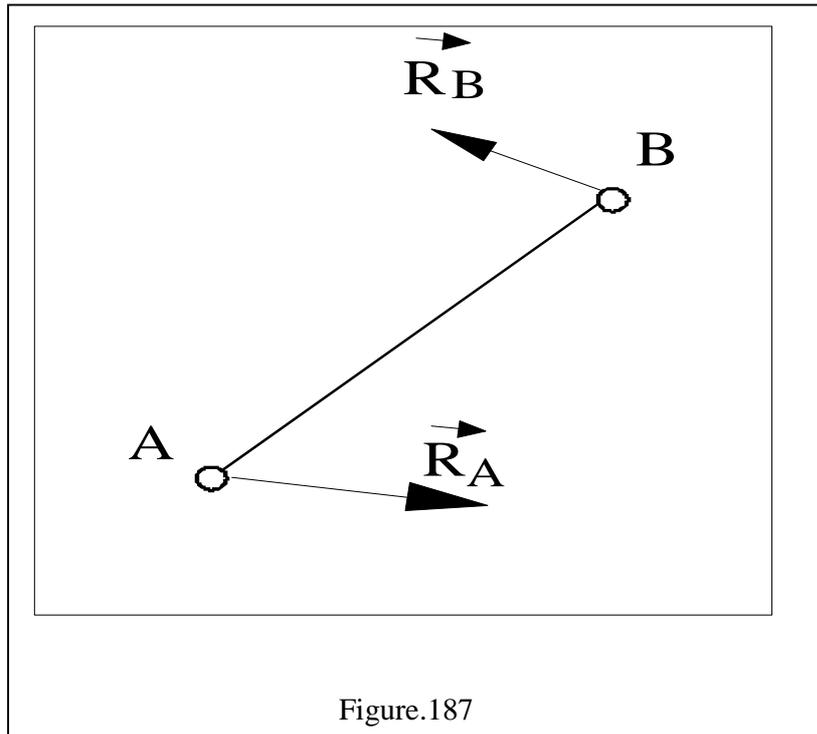
Définition



Un **treillis** figure.186 ou un **système de barres réticulées** est un assemblage de poutres droites (ou barres) liées entre elles ou avec un bâti par des **articulations** parfaites. De plus :

Les charges concentrées sont appliquées **uniquement aux nœuds** (lieux de rencontres des barres entre elles ou avec le bâti). Il n'y a pas de charges réparties sur les barres (elles sont de ce fait supposées non pesantes).

Sous ces hypothèses, il est facile de conclure qu'à l'équilibre, chaque barre d'un treillis est soumise à une traction ou à une compression uniforme. En effet, isolons une barre quelconque d'un treillis ; ses extrémités notées A et B sont soumises aux forces extérieures R_A et R_B : figure.187



L'équilibre de la barre conduit aux équations :

$$\vec{R}_A + \vec{R}_B = 0$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{R}_B = 0$$

Les actions sur la barre sont alors colinéaires à celle-ci, égales en module et de sens opposés.

CALCUL D'UN TREILLIS :

Le but de ce paragraphe est de donner les équations permettant de résoudre (détermination des réactions d'appuis, des tensions dans toutes les barres et des déplacements des nœuds) n'importe quel treillis isostatique ou hyperstatique. Figure.188

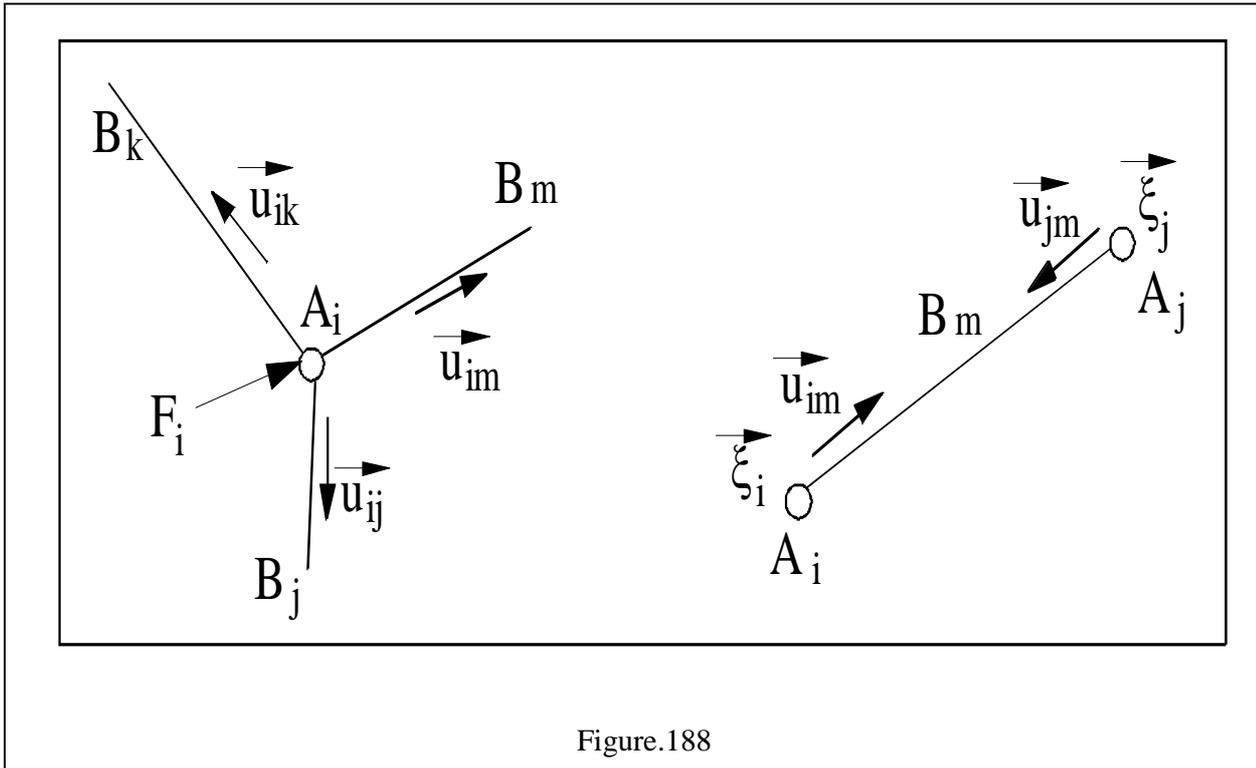


Figure.188

Notations :

A_i le nœud de jonction des barres B_j, B_k, B_m, \dots

\vec{u}_{im} le vecteur unitaire issu de A_i dans la direction de la barre B_m .

\vec{F}_i la force extérieure agissant sur le nœud A_i

$\vec{N}_m = N_m \vec{u}_{im}$ l'action de la barre B_m sur le nœud A_i (à l'équilibre).

$\vec{\xi}_i$ le déplacement (à l'équilibre) du nœud A_i .

avec ces définitions, si N_m est positif, la barre B_m est en traction.

Equations d'équilibre du treillis :

L'équilibre de chaque barre a été écrit, il permet d'affirmer que l'action de la barre sur un nœud est une force colinéaire à la barre. Les équations d'équilibre se réduisent donc à celles des nœuds. Celles-ci s'écrivent :

$$\forall A_i \quad \vec{F}_i + \sum_{\text{barres}(A_i)} N_m \vec{u}_{im} = 0$$

où la sommation se fait sur toutes les barres aboutissant au nœud A_i . Chaque nœud fournit une équation vectorielle (trois équations scalaires dans l'espace, deux équations scalaires dans le plan)

Equations d'allongement des barres :

Une barre de section S , de module d'Young E et de longueur l , soumise à un effort normal constant N subit un allongement Nl/ES . Ainsi, on peut écrire, pour chaque barre d'un treillis, l'équation scalaire suivante :

$$\forall B_m \quad \vec{\xi}_i \cdot \vec{u}_{im} + \vec{\xi}_j \cdot \vec{u}_{jm} + \frac{N_m l_m}{E_m S_m} = 0$$

Chaque barre fournit une équation scalaire.

Remarques

1. Les inconnues sont les efforts normaux dans les barres, les réactions d'appuis (actions de liaison) et les composantes des déplacements des nœuds. Si le problème est bien posé, le nombre d'équations sera égal au nombre d'inconnues.
2. Pour un treillis isostatique, il est possible de déterminer tous les efforts par les seules équations d'équilibre. Puis, si on le souhaite, et de manière séparée, utiliser ce résultat pour calculer, en seconde étape, les déplacements à l'aide des équations de l'allongement.
3. Pour un système hyperstatique, on ne peut déterminer les efforts par les seules équations d'équilibre. Les équations d'allongement (qui font intervenir le comportement du matériau) sont nécessaires pour effectuer la résolution qui se fera d'un bloc, même si on ne souhaite pas calculer les déplacements des nœuds.

EX.1 Pièce support d'ATR 42

L'avion ATR 42 figure.189

L'avion ATR 42 peut transporter de 42 à 50 passagers avec un rayon d'action de 1700 km. Motorisé par deux turbopropulseurs "PRATT et WHITNEY", chacun équipé d'une hélice "HAMILTON" quadripale de diamètre 3,96 m. Cet avion de longueur 22,67 m, d'envergure 24,57 m, de hauteur hors tout 7,59 m, de masse maximale au décollage de 16700 kg a une capacité de carburant de 4500 kg.

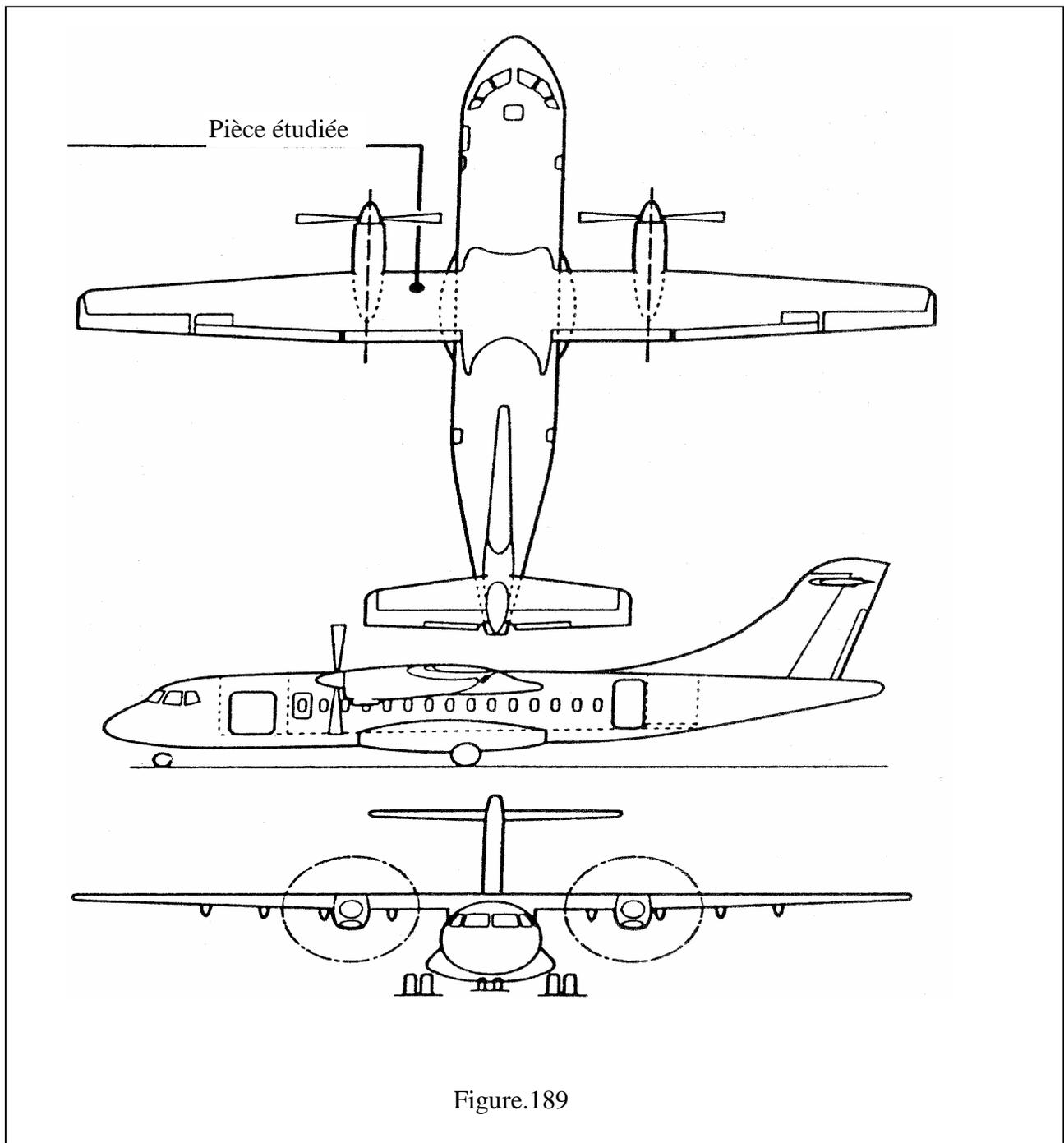


Figure.189

Conditionnement d'air

Dans l'ATR 42, pour le confort des passagers et du personnel navigant, deux groupes de climatisation maintiennent dans tout le fuselage un air à pression et température régulées ; chacun des deux groupes de climatisation est alimenté en air chaud, sous pression, prélevé du compresseur axial de l'un des deux turbopropulseurs correspondant.

A faible régime, c'est à dire l'avion au sol ou en descente :

la veine d'air prépondérante en débit, prélève l'air "haute pression" du dernier étage du compresseur axial et l'amène dans une électrovanne de régulation.

A régime de croisière ou de montée :

la veine d'air prépondérante en débit, prélève l'air "basse pression" d'un étage intermédiaire du compresseur axial.

Dans tous les cas :

ces deux veines de "haute pression régulée" et de "haute pression" se raccordent sur une tuyauterie commune située dans le longeron de voilure et la paroi intérieure du bord d'attaque de l'aile et allant du turbopropulseur au fuselage. Cette tuyauterie commune rejoint le groupe de climatisation placé dans la bossette de l'atterrisseur principal. Cet air passe ensuite dans les échangeurs (régulation de température) puis dans un compresseur (pressurisation) , ce compresseur étant lui même actionné par une turbine utilisant une partie de cet air.

Figure.190

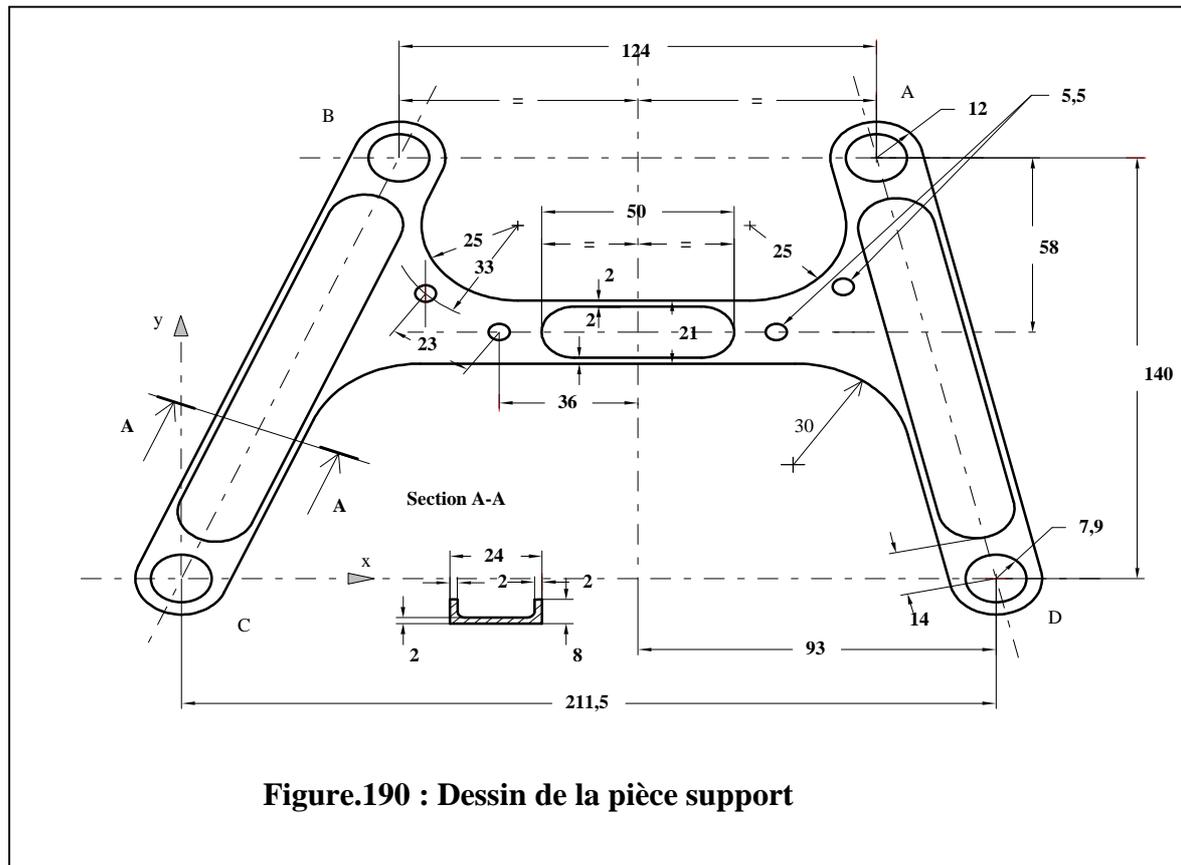


Figure.190 : Dessin de la pièce support

Données

La pièce étudiée, support de tuyauterie, mise en situation (figure 5.3. 1) et dessinée (figure 5.3. 2) fait partie d'un ensemble (figure 5.3. 3 et 4) qui maintient la tuyauterie commune le long du longeron de voilure de l'avion. Figure.191 et 192

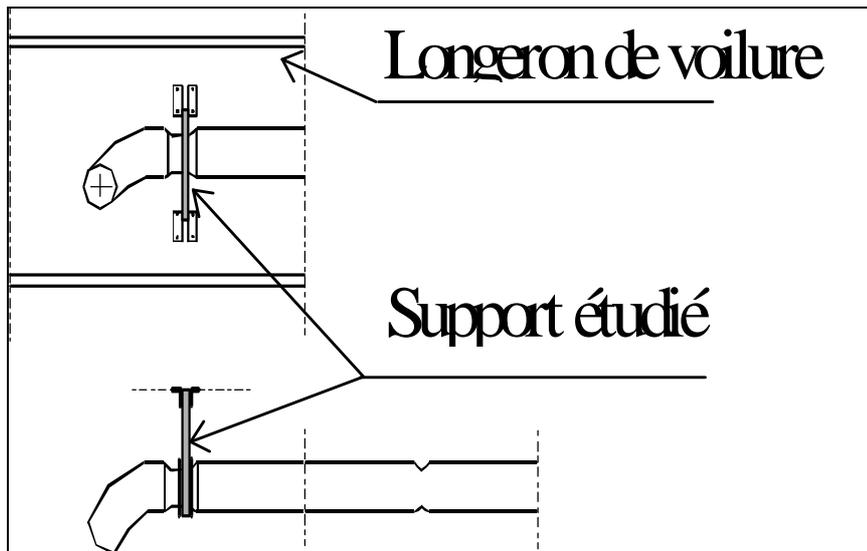


Figure.191

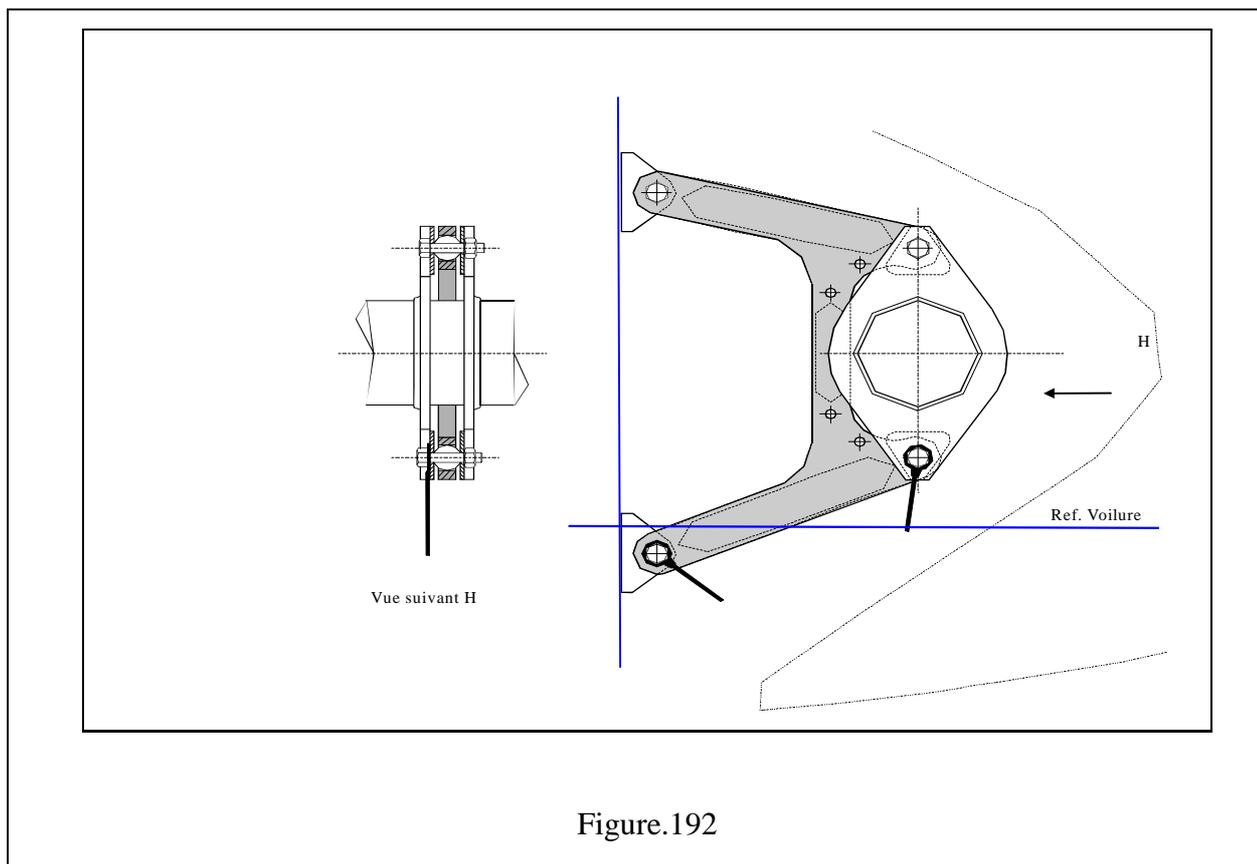


Figure.192

Caractéristiques techniques figure.193

Nature du matériau : "Duralumin" (AU4G ou 2024) ;

Mode d'obtention : usinée dans la masse ;

Protection anticorrosion : oxydation anodique chromique ;

Masse de la pièce : 189 g

Module de Young : $E = 72000 \text{ MPa}$;

Module de Coulomb : $G = 27000 \text{ MPa}$;

Appuis :

Appuis pivots en C et D

Charges extérieures

En A : glisseur $\vec{A} = 600 \vec{x} - 1600 \vec{y}$

En B : glisseur $\vec{B} = 600 \vec{x} - 1600 \vec{y}$

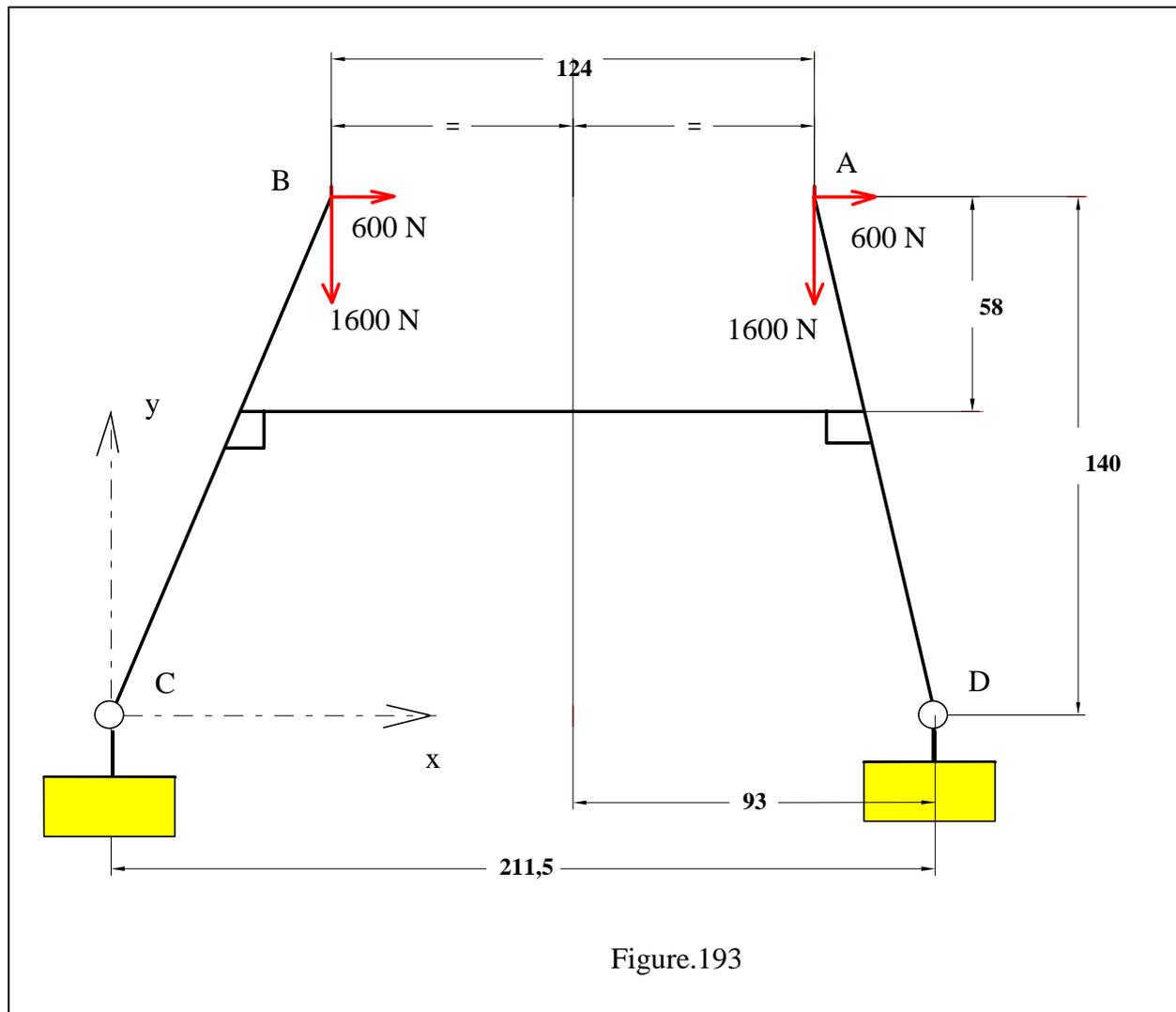


Figure.193

Travail demandé

1.En théorie des poutres

a) Elaborer un modèle d'étude qui permette de déterminer les déplacements des points A et B ainsi que les contraintes maximales .

Faire les hypothèses nécessaires. Les préciser .

b) Traiter ce modèle à l'aide de "RDM Ossatures".

c) Analyser les résultats obtenus.

2.En élasticité plane

a) Elaborer un modèle d'étude qui permette de déterminer les déplacements des points A et B ainsi que les contraintes maximales .

Faire les hypothèses nécessaires. Les préciser .

b) Traiter ce modèle à l'aide de "RDM élasticité".

c) Analyser les résultats obtenus et les comparer à ceux obtenus à l'aide de la théorie des poutres.

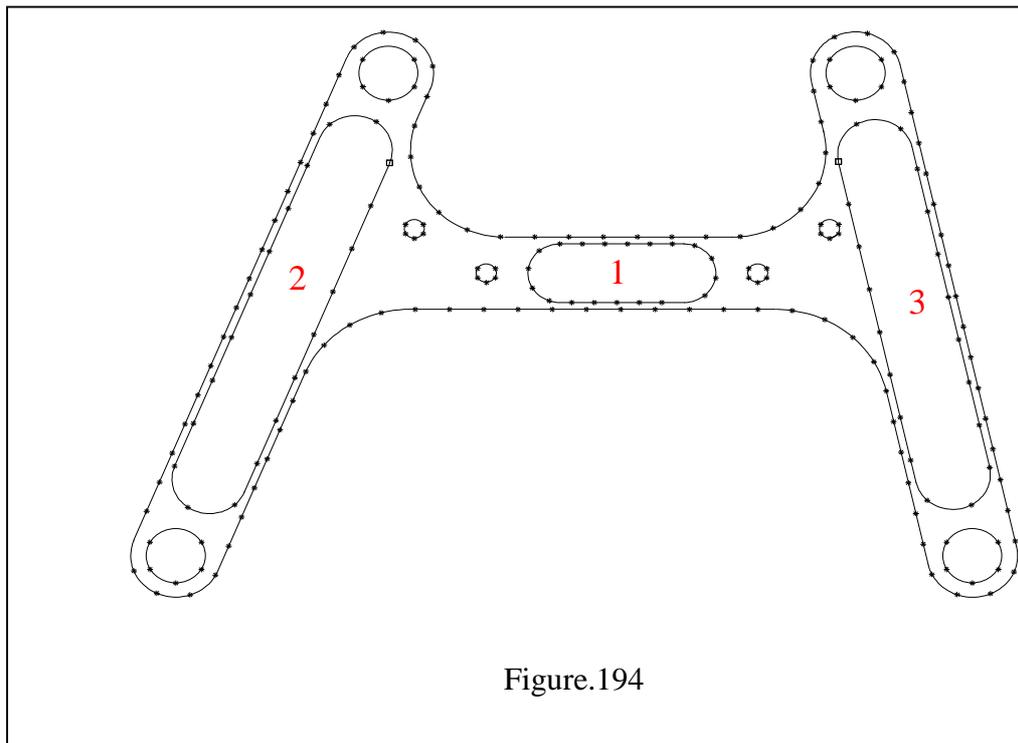
Résultats

Seule l'étude en élasticité plane a été conduite. Afin de montrer l'influence d'appuis hyperstatiques sur la rigidité, on a mis la pièce successivement en appui isostatique et en appui hyperstatique.

Bien que la pièce ne soit pas tout à fait symétrique par rapport au plan xOy (section A-A) , on conduit une étude en contraintes planes.

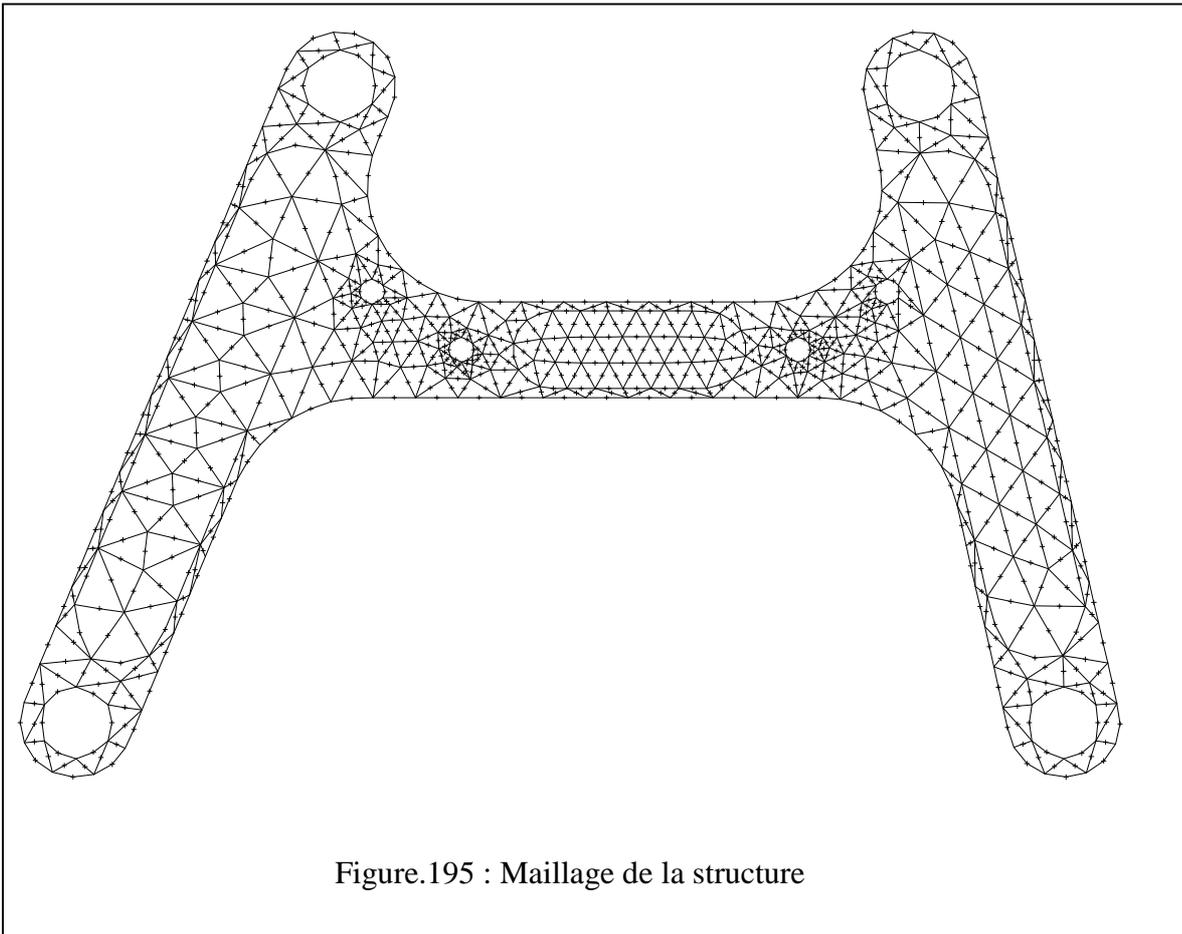
Appuis de type pivots en C et D (hyperstatique)

Maillage figure.194 et 195

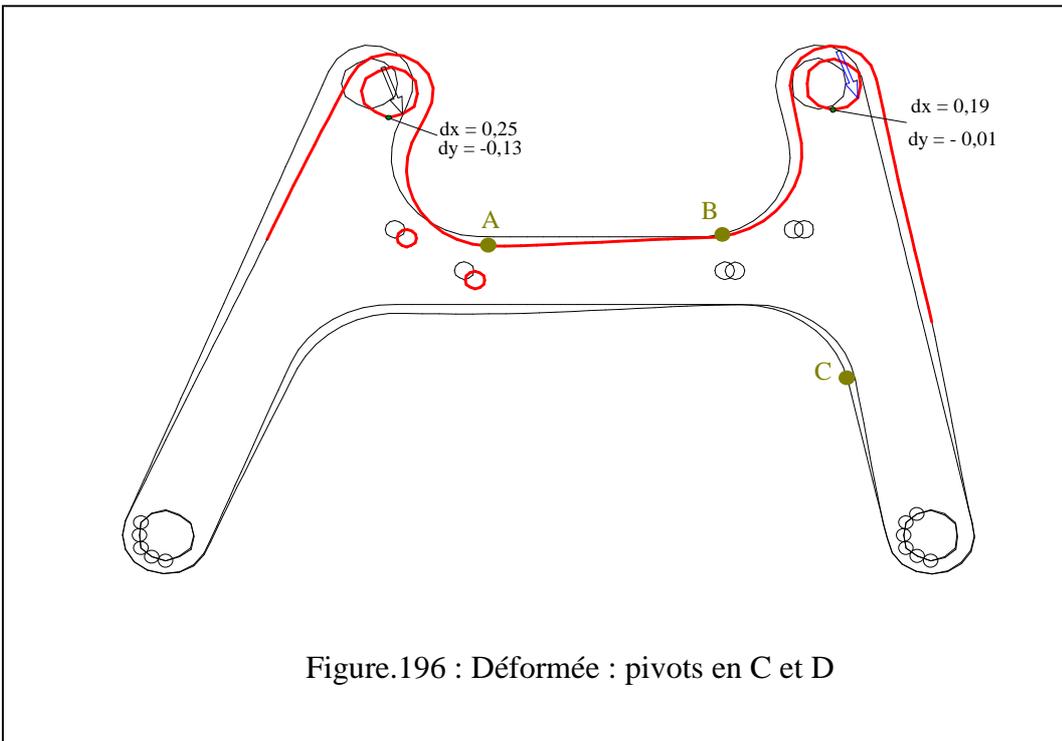


Les zones 1,2 et 3 admettent une épaisseur de 2 mm

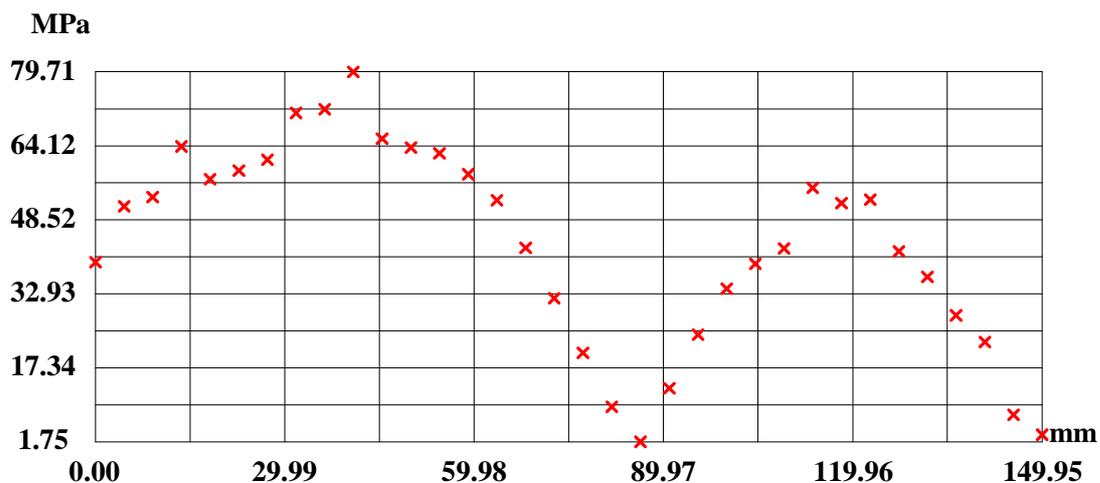
Les autres admettent une épaisseur de 8 mm



Appuis et déplacements en A et B figure.196

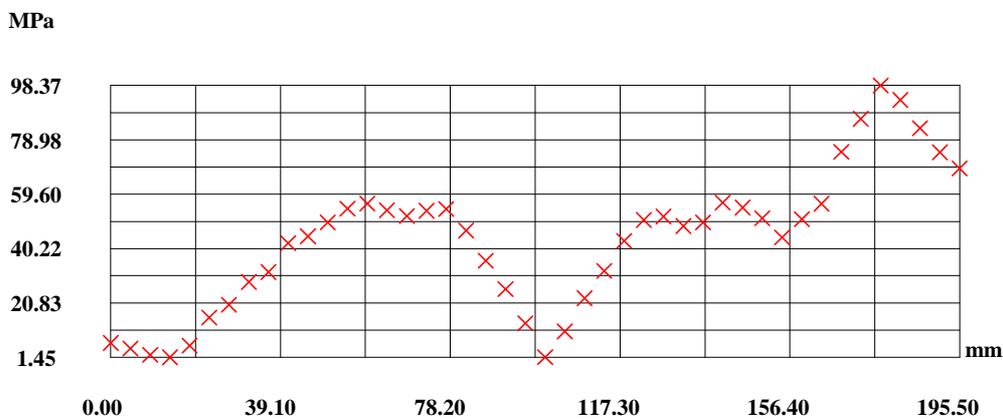


Contraintes équivalente de Von Mises figure.197



SIGMA VON MISES
MIN = 1.75 MPa A 86.34 mm
MAX = 79.71 MPa A 40.86 mm

Figure.197 : Contrainte de Von-Mises sur la frontière supérieure de la membrure horizontale
 Les maximums se situent en A et B dans les rayons de raccordement



SIGMA VON MISES
MIN = 1.45 MPa A 13.64 mm
MAX = 98.37 MPa A 177.31 mm

Figure.198 : Contrainte de Von-Mises sur la frontière inférieure de la membrure horizontale
 Le maximum se situe en C dans le rayon de raccordement

Avec appui ponctuel en D (isostatique)

Déformée. Figure.199

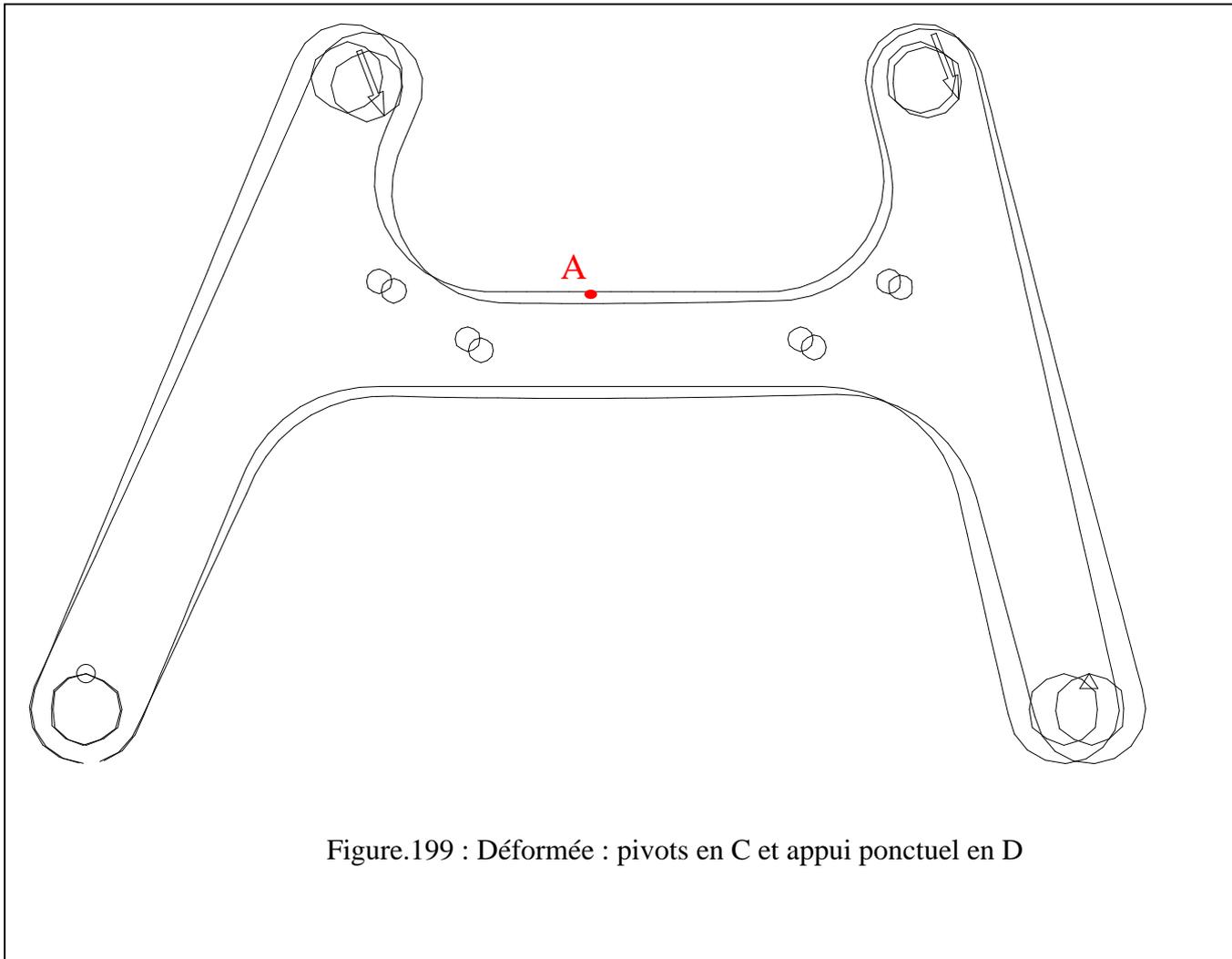


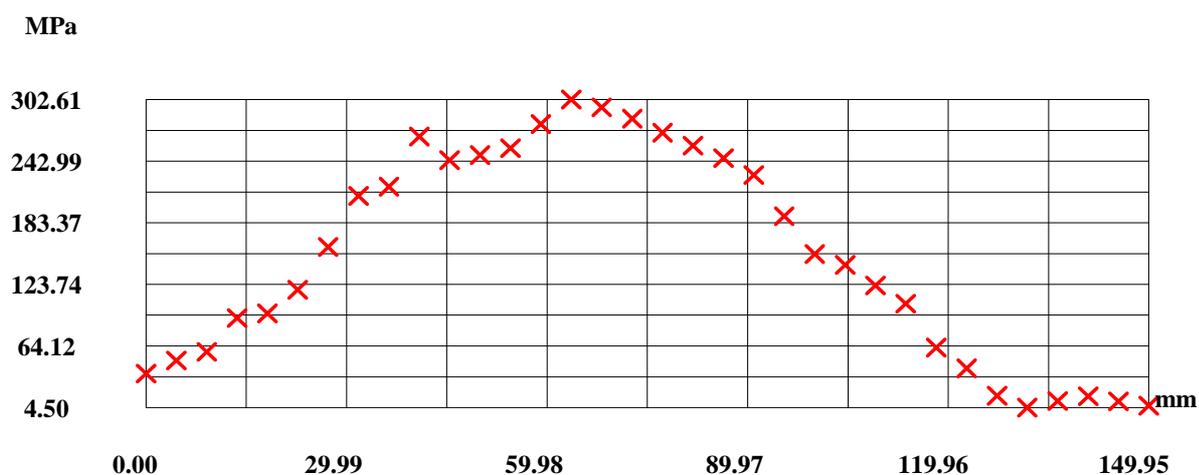
Figure.199 : Déformée : pivots en C et appui ponctuel en D

Déplacements du noeud B : $dx = 2,28 \text{ mm}$; $dy = -1,06 \text{ mm}$

Déplacements du noeud A : $dx = 0,81 \text{ mm}$; $dy = -0,54 \text{ mm}$

Ces déplacements sont beaucoup plus importants que pour la structure en appui hyperstatique.

Contraintes équivalente de Von Mises figure.200



SIGMA VON MISES

MIN = 4.50 MPa A 131.78 mm

MAX = 302.61 MPa A 63.60 mm

Figure.200 : Contrainte de Von-Mises sur la frontière supérieure de la membrure horizontale

Le maximum de contrainte équivalente se situe au voisinage du point A

La comparaison de ces résultats avec ceux obtenus avec appuis pivots en C et D montre tout l'intérêt de mettre la structure en appuis hyperstatique. La rigidité de la structure s'en trouve accrue.

EX.2 Support de galet freineur

Ce problème est tiré de la première épreuve d'admissibilité du concours d'Agrégation Interne de Mécanique 1996

Objectif de ce problème

La façon de poser le problème à traiter est ici plus générale que la façon académique qui consiste à se donner d'emblée les efforts appliqués à la pièce.

En effet, on se propose de vérifier la tenue aux efforts d'une pièce appartenant à un système mécanique. On ne connaît donc pas directement les actions mécaniques s'exerçant sur les pièces sur lesquelles on se propose de conduire une vérification.

Un calcul préalable, conduit en statique, est ici nécessaire pour déterminer les actions mécaniques appliquées aux pièces à vérifier.

La donnée première du problème n'est d'ailleurs pas une action mécanique, mais un déplacement de solide. On verra que mener à bien un tel problème nécessite un **calcul itératif** et l'élaboration **d'un algorithme de résolution**.

Présentation du système mécanique

Référence au document 3 : « Fiche technique galet freineur 7302 »

Le galet freineur de type 7302 qui fait l'objet de cette étude est conçue par la société SIPA ROLLER.

C'est un système mécanique qui se place dans les couloirs de stockage dynamique. Son but est de maîtriser la vitesse gravitaire de déplacement des charges transportées (marchandises, palettes,). Ce galet est utilisable pour freiner des charges variant de 35 à 1000 kg. La vitesse de déplacement de la charge est comprise entre 0,1 et 0,3 m/s.

Description du galet freineur figure.201 et 202

Références aux documents 1 : plan d'ensemble et 2 : nomenclature

Le galet freineur est supporté sur deux rails porteurs en tôle (R) par deux colonnes support (17) et (18) et poutres supports (15) et (16) déformables élastiquement. L'ensemble des différents composants sont montés sur l'axe principal (11). Les ressorts (10) assurent un effort normal déterminé entre le tambour (2) du galet et la palette de produit à transporter.

Le porte-satellite (1) est lié en rotation à la poutre support (15) par l'intermédiaire de son embout hexagonal.

Le tambour (2) est entraîné en rotation par la palette à freiner.

Deux trains épicycloïdaux montés en série ont pour fonction d'augmenter la fréquence de rotation du porte-mâchoires (6) d'un frein à inertie dont les mâchoires (7) freinent le tambour (2) du galet freineur.

La liaison entre les deux colonnes support (17) et (18) et le tambour (2) du galet est assurée par deux supports déformables élastiquement, repérés (15) et (16) .

L'objectif de ce travail consiste à effectuer l'étude en élasticité plane des supports (15) et (16) du galet freineur, de façon à déterminer l'action mécanique entre la palette et le tambour **pour un dénivellement donné du galet** par rapport à la voie de roulement.

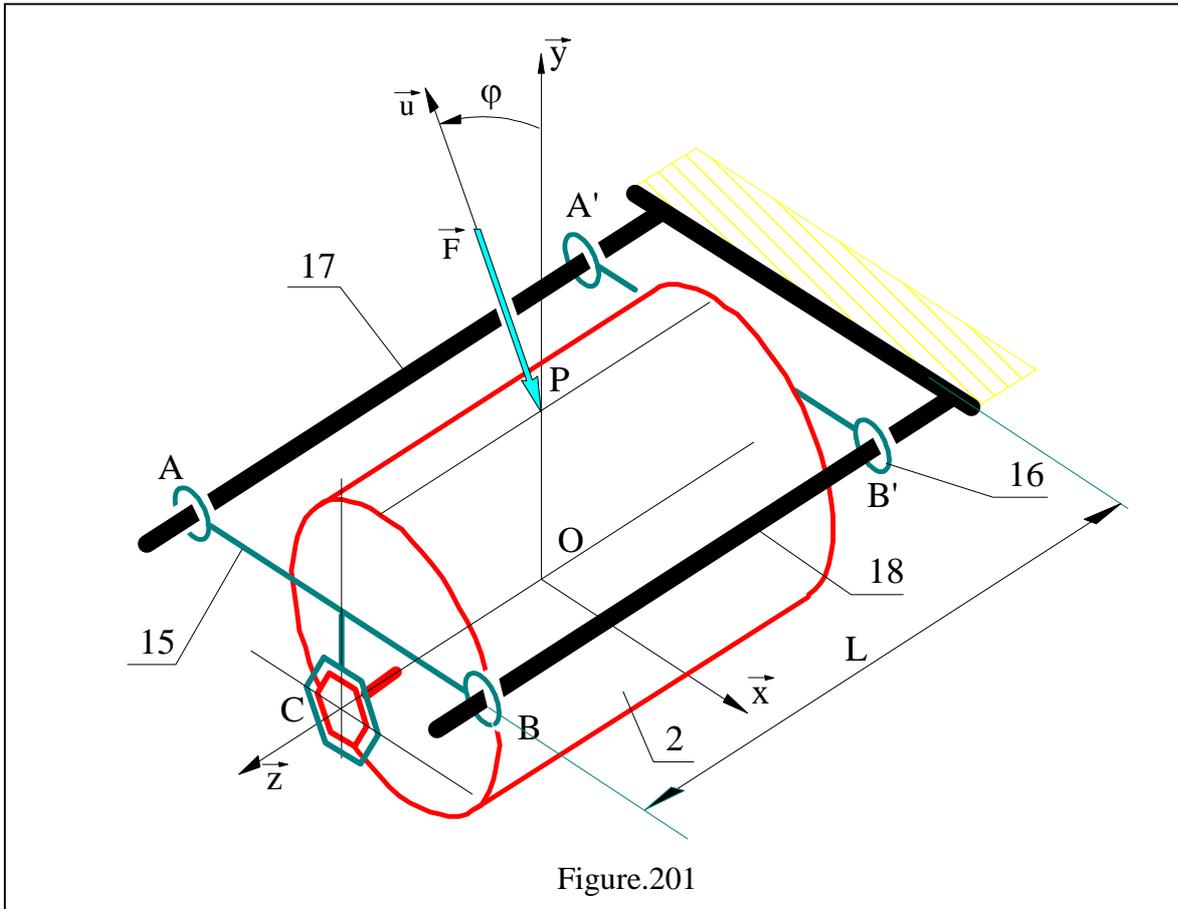
Remarques :

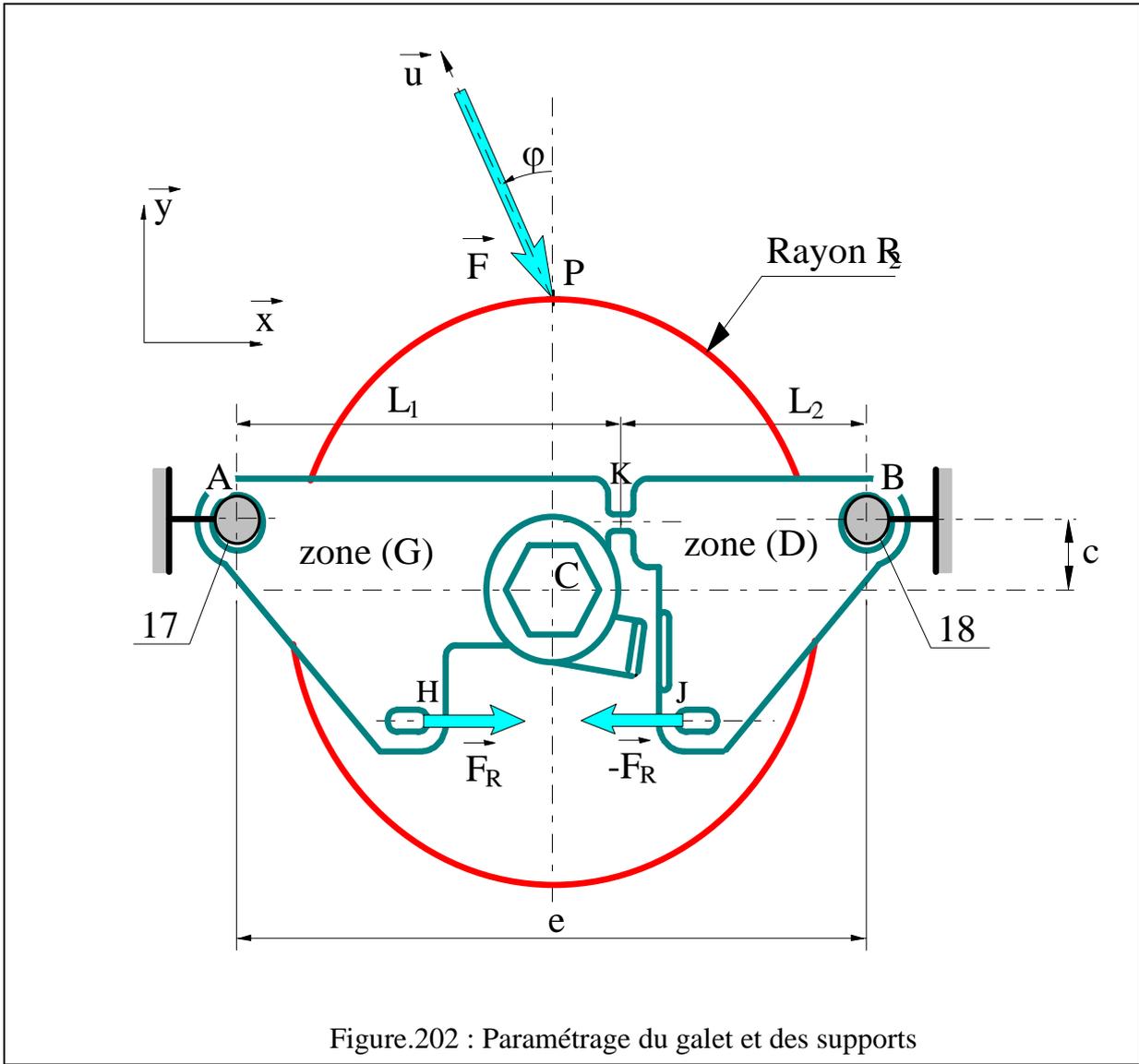
- on désigne par galet, repéré (2), l'ensemble des éléments internes au galet (repères 1 à 14, document 1) ;
- les deux supports, définis figure 5.3. 1, sont géométriquement identiques. Seul celui repéré (15) est sollicité par le couple de freinage du galet au niveau de l'accouplement hexagonal; le second support est repéré (16) ;
- toutes les liaisons des supports (15) et (16) avec le galet (2) et les colonnes (17) et (18) présentent un jeu important.

Les supports (15) et (16) sont réalisés dans un matériau synthétique nommé PA6. L'ensemble galet est soumis :

- à l'action de la palette, supposée réductible à un glisseur faisant un angle φ avec \vec{y} et appliqué au point P, milieu de la génératrice supérieure du galet ;
- aux actions de deux ressorts de traction agissant entre les points H et J du support (15), et H' et J' du support (16).
- aux actions des deux colonnes 17 et 18

Toutes les autres actions extérieures seront supposées négligeables.





Données numériques :

Ce paragraphe regroupe les notations et valeurs numériques des paramètres du problème. Certains d'entre eux seront définis ultérieurement.

Paramètres géométriques :

- | | | |
|---------------------------------------|----------------------------------|-----------------------|
| ■ rayon du galet : | $R_2 = 42,5 \text{ mm};$ | |
| ■ entraxe des colonnes (17) et (18): | $AB = A'B' = e = 110 \text{ mm}$ | |
| ■ distance des supports (15) et (16): | $AA' = BB' = L = 120 \text{ mm}$ | |
| ■ $L_1 = 68 \text{ mm}$ | ■ $L_2 = 42 \text{ mm}$ | ■ $l = 6 \text{ mm}$ |
| ■ $d_1 = 34 \text{ mm}$ | ■ $d_2 = 10 \text{ mm}$ | ■ $c = 13 \text{ mm}$ |
| ■ $h = 32 \text{ mm}$ | ■ $a = 11 \text{ mm}$ | ■ $b = 3 \text{ mm}$ |

Contact galet-palette :

- action palette-galet (valeur initiale considérée pour le démarrage du calcul itératif) :

$$F = 450 \text{ N}$$

- angle de frottement : $\varphi = 36^\circ$

Ressort :

- $L_0 = 42 \text{ mm}$

- $k = 22 \text{ N/mm}$

Matériau synthétique PA6 des supports :

- module de Young :

$$E = 1850 \text{ Mpa (N/mm}^2\text{)}$$

- limite élastique en traction:

$$R_e = 49 \text{ Mpa (N/mm}^2\text{)}$$

Etude statique

L'intérêt de cette question repose sur la prise en compte des jeux dans les liaisons pour procéder à l'étude statique du galet freineur, étude qui sans cette hypothèse présenterait un caractère hyperstatique.

En plus des hypothèses exposées ci-dessus, on suppose pour cette étude statique (figure 5.4. B-1) :

- que les supports (15) et (16) sont indéformables;
- que leurs liaisons avec les colonnes (17) et (18) sont réalisées avec un jeu j important (jeu au rayon: $j = R - r$), qui permet de considérer ponctuels les contacts avec ces pièces;
- que le frottement peut être négligé au contact des supports et des colonnes.
- que l'action de la palette sur le galet est modélisable par un glisseur noté :

$$\left\{ \mathbf{F}_{palette \rightarrow galet} \right\}_P = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = -F \vec{u} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Etude statique du galet

- a) L'ensemble constitué par les supports (15) et (16) et les axes (17) et (18) étant supposé rigide, proposer des liaisons entre le galet (2) et cet ensemble conduisant à un modèle isostatique et assurant l'équilibre du galet.

Réponse :

Pour assurer l'équilibre du galet, sa liaison avec l'ensemble du bâti supposé rigide doit être globalement un encastrement.

Il est réalisé de façon pratique au moyen de deux liaisons avec les supports (15) et (16). Seul le contact avec (15) est susceptible d'exercer la composante de moment suivant \vec{z} assurant la fonction de freinage du galet.

On conviendra de représenter cette liaison par une liaison sphérique à doigt de centre $(C; \vec{z})$ et la liaison avec (16) par une linéaire annulaire d'axe $(C'; \vec{z})$.

b) Procéder à l'étude statique du galet (2) et en déduire les actions exercées sur les supports (15) et (16).

Application numérique: déterminer la valeur numérique de ces actions.

Réponse :

On note $(\vec{t}, \vec{u}, \vec{z})$ la base déduite par rotation d'angle φ de $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) : (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \xrightarrow{\varphi} (\vec{t}, \vec{u}, \vec{z})$

Le galet est soumis à trois actions:

- Action de la palette:
$$\underset{\text{P}}{\{F_{\text{palette}} \rightarrow (2)\}} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = -F \vec{u} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

- Action du support (15):
$$\underset{\text{C}}{\{F_{15} \rightarrow 2\}} = \left\{ \begin{array}{l} X \vec{t} + Y \vec{u} + Z \vec{z} \\ N \vec{z} \end{array} \right\}$$

- Action du support (16):
$$\underset{\text{C}'}{\{F_{16} \rightarrow 2\}} = \left\{ \begin{array}{l} X' \vec{t} + Y' \vec{u} \\ \vec{0} \end{array} \right\}$$

Equilibre en O:

Résultante en projection sur $(\vec{t}, \vec{u}, \vec{z})$: Moment en projection sur $(\vec{t}, \vec{u}, \vec{z})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} X + X' = 0 \\ Y + Y' - F = 0 \\ Z = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} (X - X') \frac{L}{2} = 0 \\ (Y - Y') \frac{L}{2} = 0 \\ N - FR_2 \sin \varphi = 0 \end{array} \right.$$

D'où:
$$\boxed{\begin{array}{l} X = X' = 0 \\ Y = Y' = \frac{F}{2} \\ Z = 0 \\ N = FR_2 \sin \varphi \end{array}}$$

AN:
$$\boxed{\begin{array}{l} X = X' = 0 \text{ N} \\ Y = Y' = 225 \text{ N} \\ Z = 0 \\ N = 11,24 \text{ Nm} \end{array}}$$

Etude statique du support (15)_figure.203

La figure 5.4. 2 montre, avec une amplification importante des jeux et déplacements, la géométrie de l'ensemble support (15) et colonnes (17) et (18) après application des efforts sur le galet (2).

Les points A et B sont les centres des sections des arbres (17) et (18), de rayons r. Les points A₁ et B₁ sont les centres des alésages du support, de rayons R. Les entraxes AB et A₁B₁ présentent une différence de longueur notée δ , défini avec $\delta < j = R-r$ où j représente le jeu au rayon de la liaison.

Les contacts sont ponctuels, de normales \vec{n}_A et \vec{n}_B , telles que $(\vec{y}, \vec{n}_A) = \theta_A$ et $(\vec{y}, \vec{n}_B) = \theta_B$.

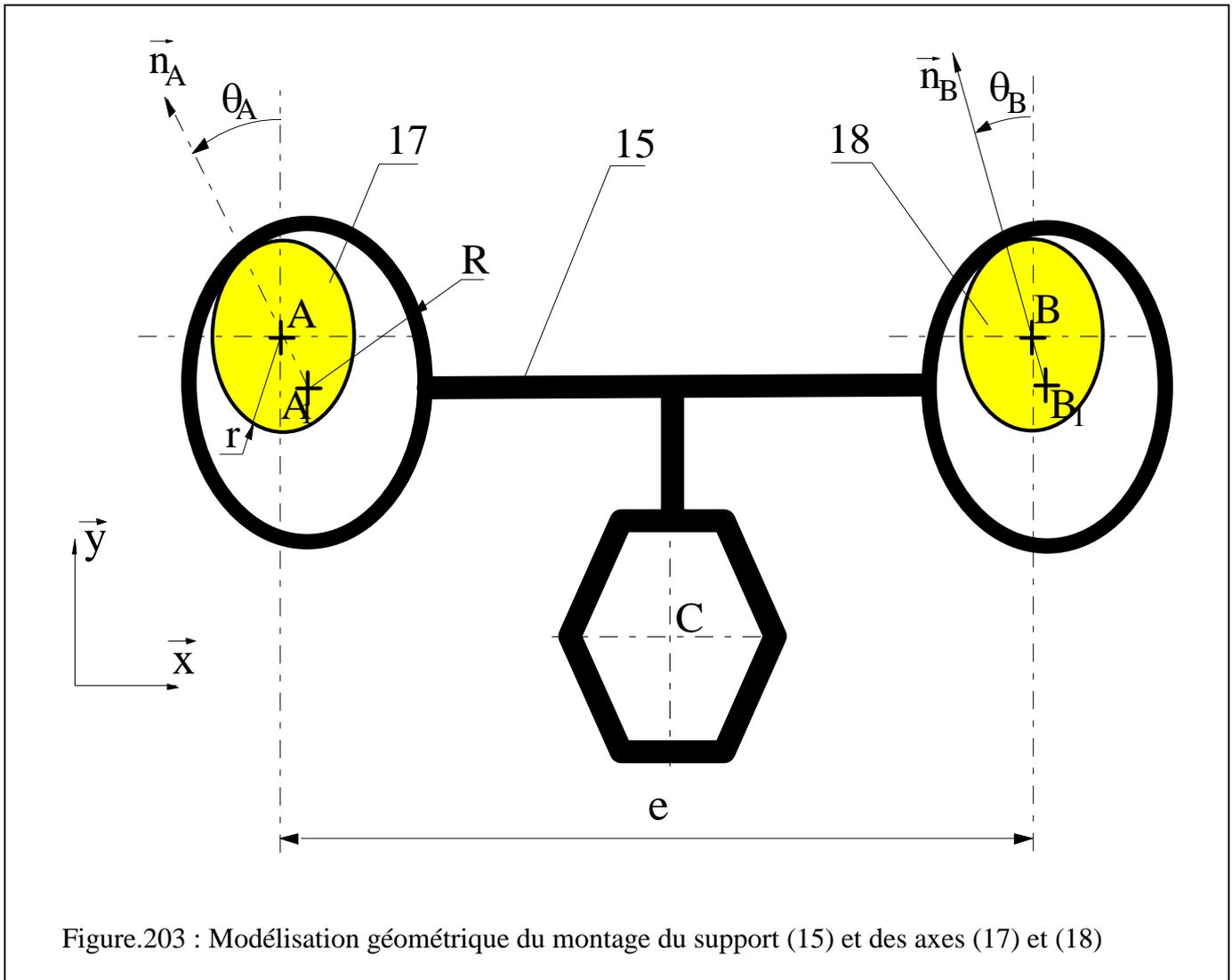
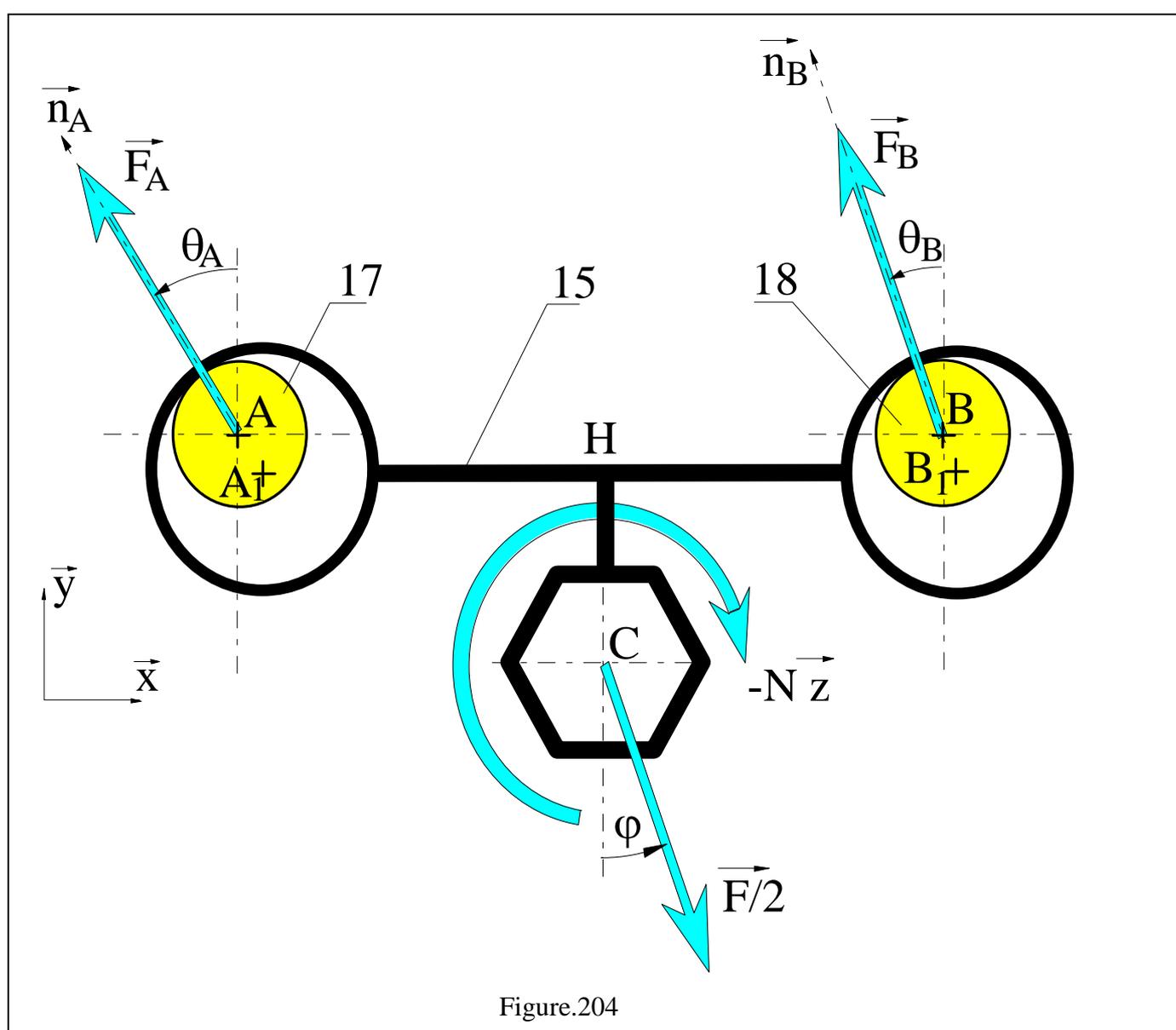


Figure.203 : Modélisation géométrique du montage du support (15) et des axes (17) et (18)

- a) Réaliser un schéma du support (15) et représenter graphiquement les actions mécaniques qui lui sont appliquées.
- b) Exprimer la relation géométrique liant les inclinaisons α_A et α_B des normales au contact entre le support (15) et les axes (17) et (18) en fonction de j et α .
- c) Que devient cette relation si $\alpha = 0$?

Réponse :



Soit $\vec{AB} = e \vec{x}$ l'entraxe des arbres (11) et (12) constituant le bâti; l'entraxe des alésages du support a pour expression $A_1B_1 = (e + \delta) \vec{x}'$ avec $(\vec{x}, \vec{x}') = \alpha$ où α est un angle de faible valeur.

D'autre part, le support (15) étant en contact avec les axes (17) et (18), on a les propriétés:

$$\begin{cases} \vec{A_1A} = (R - r) \vec{n}_A = j \vec{n}_A = j(-\sin \theta_A \vec{x} + \cos \theta_A \vec{y}) \\ \vec{B_1B} = (R - r) \vec{n}_B = j \vec{n}_B = j(-\sin \theta_B \vec{x} + \cos \theta_B \vec{y}) \end{cases}$$

En utilisant la propriété vectorielle suivante :

$(\vec{AB} + \vec{BB}_1 + \vec{B_1A} + \vec{A_1A}) = \vec{0}$, on obtient en projection sur (\vec{x}, \vec{y}) :

$$\begin{cases} e - j(\sin \theta_A - \sin \theta_B) - (e + \delta) = 0 \\ j(\cos \theta_A - \cos \theta_B) - \alpha(e + \delta) = 0 \end{cases}$$

soit en particulier : $\boxed{\sin \theta_B - \sin \theta_A = \frac{\delta}{j}}$ (I)

La seconde relation confirme le caractère 'petit' de l'angle α , posé en hypothèse (ordre de grandeur de j/e)...

Les dimensions e , R , r et δ étant données, la position du support (15) par rapport aux colonnes est complètement définie par les deux angles $\theta_A = \theta_B$. La relation (I) liant ces paramètres met en évidence la mobilité de degré 1 du support par rapport au bâti supposé fixe.

Dans le cas particulier où $\delta = 0$, on vérifie que $\theta_A = \theta_B$.

2°) Exprimer les conditions d'équilibre du support (15). En déduire:

- Les expressions des actions des axes en A et B, notées \vec{R}_A , et \vec{R}_B en fonction de F , e , R_2 , c , \square , \square_A , et \square_B .
- Exprimer les conditions liant \square_A et \square_B à l'équilibre

3°)

- Etudier le cas particulier où les entraxes des arbres et des alésages sont égaux ($\square = 0$).
- Application numérique: en déduire les valeurs numériques des actions R_A et R_B .

L'hypothèse $\square = 0$ et les expressions correspondantes des actions \vec{R}_A et \vec{R}_B sont retenues pour la suite de l'étude.

Réponse :

Dans cette question de statique, on suppose que les petits déplacements dus aux jeux entre le support et les colonnes ne modifient pas sensiblement la géométrie de l'ensemble, donc les relations traduisant l'équilibre. Cela revient à supposer que A et A₁ sont confondus, de même que B et B₁.

Equilibre du support (15) :

- Action du galet:



- Action de l'axe (17):

$$\{F_{(17) \rightarrow (15)}\}_A = \begin{cases} \vec{R}_A = R_A \vec{n}_A \\ \vec{0} \end{cases}$$

- Action de l'axe (18):

$$\{F_{(18) \rightarrow (15)}\}_B = \begin{cases} \vec{R}_B = R_B \vec{n}_B \\ \vec{0} \end{cases}$$

Résultante en projection sur (x, y) :

$$\begin{cases} -R_A \sin \theta_A - R_B \sin \theta_B + \frac{F}{2} \sin \varphi = 0 & \text{(II)} \\ R_A \cos \theta_A + R_B \cos \theta_B - \frac{F}{2} \cos \varphi = 0 & \text{(III)} \end{cases}$$

Moment en C, en projection sur \vec{z} :

$$\vec{HA} \wedge R_A \vec{n}_A + \vec{HB} \wedge R_B \vec{n}_B + \vec{HC} \wedge \frac{\vec{F}}{2} - N \vec{z} = \vec{0},$$

soit après développement : $-e(R_A \cos \theta_A - R_B \cos \theta_B) - F \sin \varphi (2R_2 - c) = 0$ (IV)

Il est possible, en combinant les équations (III) et (IV) d'exprimer deux relations liant R_A et θ_A d'une part, R_B et θ_B d'autre part :

$\begin{cases} R_A \cos \theta_A = F \left[\frac{\cos \varphi}{4} - \sin \varphi \left(\frac{2R_2 - c}{2e} \right) \right] & \text{(III')} \\ R_B \cos \theta_B = F \left[\frac{\cos \varphi}{4} + \sin \varphi \left(\frac{2R_2 - c}{2e} \right) \right] & \text{(IV')} \end{cases}$

En remplaçant R_A et R_B dans (II), on exprime une seconde condition sur θ_A et θ_B à l'équilibre :

$$\tan \theta_A \left[\frac{1}{4 \tan \varphi} - \frac{2R_2 - c}{2e} \right] + \tan \theta_B \left[\frac{1}{4 \tan \varphi} + \frac{2R_2 - c}{2e} \right] = \frac{1}{2} \quad (\text{II}')$$

à rapprocher de la condition géométrique (I) :

$$\sin \theta_B - \sin \theta_A = \frac{\delta}{j}$$

Conclusion :

Les quatre relations (I), (II), (III) et (IV) lient les quatre paramètres R_A , R_B , θ_A et θ_B . On déduit de la résolution de ce système la position du support à l'équilibre, ainsi que les actions dans les liaisons en A et B.

La résolution dans le cas général n'est possible que numériquement. Seul le cas particulier $\delta=0$ conduit à une solution analytique simple, hypothèse retenue dans la suite.

Etude en élasticité plane

Utilisation du logiciel d'élasticité plane «RDM Le Mans» pour étudier les contraintes et déformations du support (15).

Les conditions de l'étude sont celles définies par la figure 5.3. 1, avec pour efforts :

■ accouplement hexagonal :

$$|F_{\text{gale} \rightarrow \text{support}}| \begin{array}{c} \vec{F}_x \\ \vec{F}_y \\ \vec{M}_z \end{array} \text{ avec } F_x = 132 \text{ N} \quad F_y = -182 \text{ N} \quad \text{et } M_z = -11.2 \text{ Nm}$$

■ Action de l'arbre (17) : $|F_{(17) \rightarrow \text{support}}| \begin{array}{c} \vec{X}_A \\ \vec{Y}_A \\ \vec{0} \end{array} \text{ avec } X_A = -55 \text{ N} \quad \text{et } Y_A = 75 \text{ N}$

■ Action de l'arbre (18) : $|F_{(18) \rightarrow \text{support}}| \begin{array}{c} \vec{X}_B \\ \vec{Y}_B \\ \vec{0} \end{array} \text{ avec } X_B = -78 \text{ N} \quad \text{et } Y_B = 106 \text{ N}$

■ Action du ressort hélicoïdal : $F_R = 135 \text{ N}$

Partant d'un dessin exécuté avec un logiciel graphique (Autocad ou DMT), on importe le dessin sous forme de fichier d'échange DXF dans RDM.

On procède dans un premier temps à la définition géométrique du modèle, à son maillage en éléments triangulaires curvilignes isoparamétriques à six noeuds. Le maillage a été resserré dans la zone où l'on s'attend à un fort gradient de contraintes.

La figure du document 4 montre le résultat du maillage.

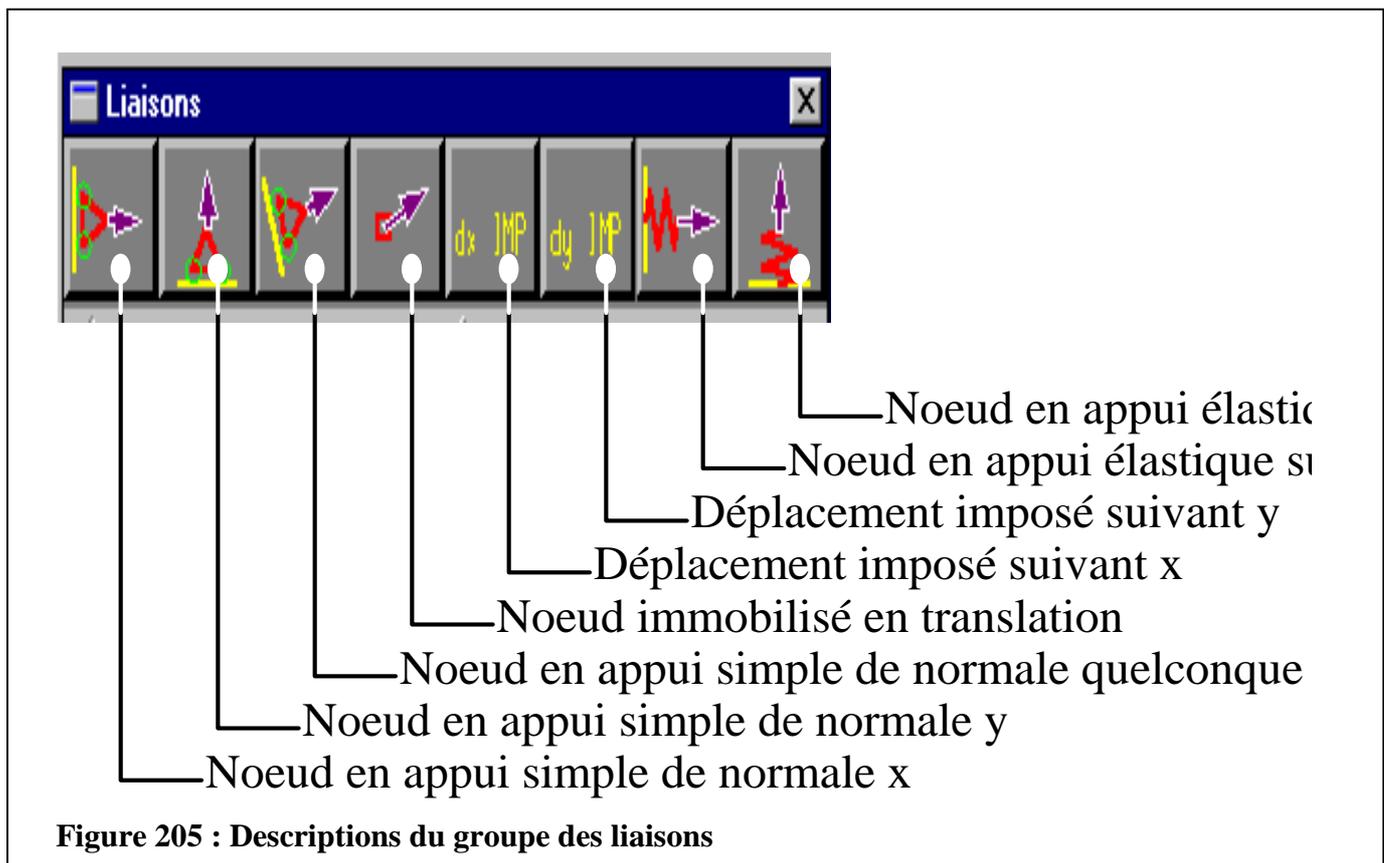
On procède ensuite à la définition :

- des épaisseurs ;
- du matériau ($E = 1850 \text{ MPa}$)

Il s'agit ensuite de définir les conditions aux limites (liaisons avec les colonnes (17) et (18) et actions extérieures).

Description des liaisons

La figure 205 présente le groupe des boutons disponibles dans le logiciel pour la description des liaisons des noeuds avec le bâti.



Ces liaisons appartiennent à l'un des quatre types suivants :

- **type 1:** les trois premiers boutons correspondent à des appuis simples de normale respectivement \vec{x} (horizontale), \vec{y} (verticale), et \vec{u} de direction quelconque, définie par l'utilisateur;
- **type 2:** le quatrième bouton correspond à une liaison du noeud interdisant son déplacement en translation;
- **type 3:** le cinquième et le sixième bouton correspondent à des liaisons imposant un déplacement connu du noeud, défini par l'utilisateur, respectivement suivant \vec{x} (horizontal, noté dx) et \vec{y} (vertical noté dy)
- **type 4:** les deux derniers boutons correspondent à des appuis élastiques, pour lesquels l'action de liaison est proportionnelle au déplacement du noeud, respectivement suivant \vec{x} ($F_x = -k\delta x$) et suivant

$$\vec{y} \quad (F_y = -k\delta y)$$

Question :

Sur la figure du document 4, définir et justifier le choix des liaisons retenues pour l'étude du support de galet. Indiquer avec précision quels noeuds font l'objet de liaisons, la nature de ces liaisons et les propriétés géométriques associées.

Réponse :

Les liaisons au niveau de chaque colonne sont modélisées par des appuis simples sur les noeuds situés à proximité immédiate de la direction \vec{u} définie par l'angle φ .

Le fait de retenir plusieurs noeuds pour chacune des deux colonnes permet d'assurer l'équilibre et de valider ultérieurement la position du support, par consultation des actions de contact déterminées lors du calcul.

Description des charges

La figure 206 présente le groupe des boutons disponibles dans le logiciel pour la description des charges extérieures appliquées au support.

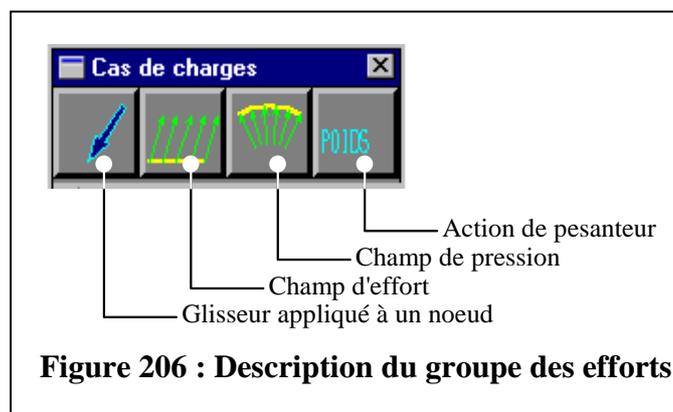


Figure 206 : Description du groupe des efforts

Ces charges appartiennent à l'un des quatre types suivants :

- **type 1** : le premier bouton correspond à un glisseur appliqué à un noeud, de composantes définies par l'utilisateur;
- **type 2** : le second bouton correspond à une charge linéique, de composantes définies par l'utilisateur et appliquée sur une partie du contour de la pièce;
- **type 3** : le troisième bouton correspond à un champ de pression uniforme sur une partie du contour extérieur de la pièce;
- **type 4** : le dernier bouton correspond à l'action de pesanteur, définie par les données relatives à la géométrie de la pièce (volume) et sa masse volumique (matériau).

Sur la figure du document 4 , définir et justifier les charges à appliquer au support pour procéder à son étude. Indiquer avec précision quels sont les noeuds soumis à ces actions, leur type et leurs propriétés géométriques et numériques.

Réponse :

Accouplement hexagonal avec le galet :

Les efforts effectivement appliqués au niveau de l'accouplement hexagonal ne peuvent pas être connus avec précision ; on choisira par conséquent un mode de chargement dont le torseur associé est conforme à celui résultant de l'action du galet. Par exemple:

■ trois glisseurs appliqués aux sommets de l'hexagone H_1 , H_2 et H_3 , de résultantes identiques, égales à

$$\frac{\vec{F}}{6} ;$$

■ deux glisseurs appliqués aux sommets H_0 et H_3 de l'hexagone, de résultantes identiques de normes égales à $\frac{FR_2 \sin \varphi}{2\rho}$, disposés tangentiellement au cercle de centre C et de rayon ρ .

Il ne faudra pas s'attacher aux résultats trop proches de ces points (principe de Saint-Venant).

Action du ressort :

L'action du ressort sera modélisée par deux glisseurs opposés, appliqués aux noeuds H et J et de norme $F_R=135$ N pour démarrer le processus de calcul.

Conditions de l'étude

Préciser et justifier en quelques mots le type d'étude envisagée: contraintes planes ou déformations planes. Indiquer les paramètres à consulter au niveau des résultats pour vérifier l'aptitude de la pièce à satisfaire aux exigences du fonctionnement.

Réponse :

Compte tenu de la faible épaisseur du support, de la symétrie plane de sa géométrie et des efforts appliqués, une étude en contraintes planes est retenue.

En règle générale, une étude en éléments finis suppose que les conditions aux limites (liaisons et efforts) sont connues.

Dans le cas particulier de ce problème, l'action F_R du ressort dépend de la déformation du support, qui dépend de l'action de la palette, elle-même fonction de l'action du ressort. Une telle situation ne trouve sa solution qu'au prix d'une succession d'études approchant progressivement de la solution effective.

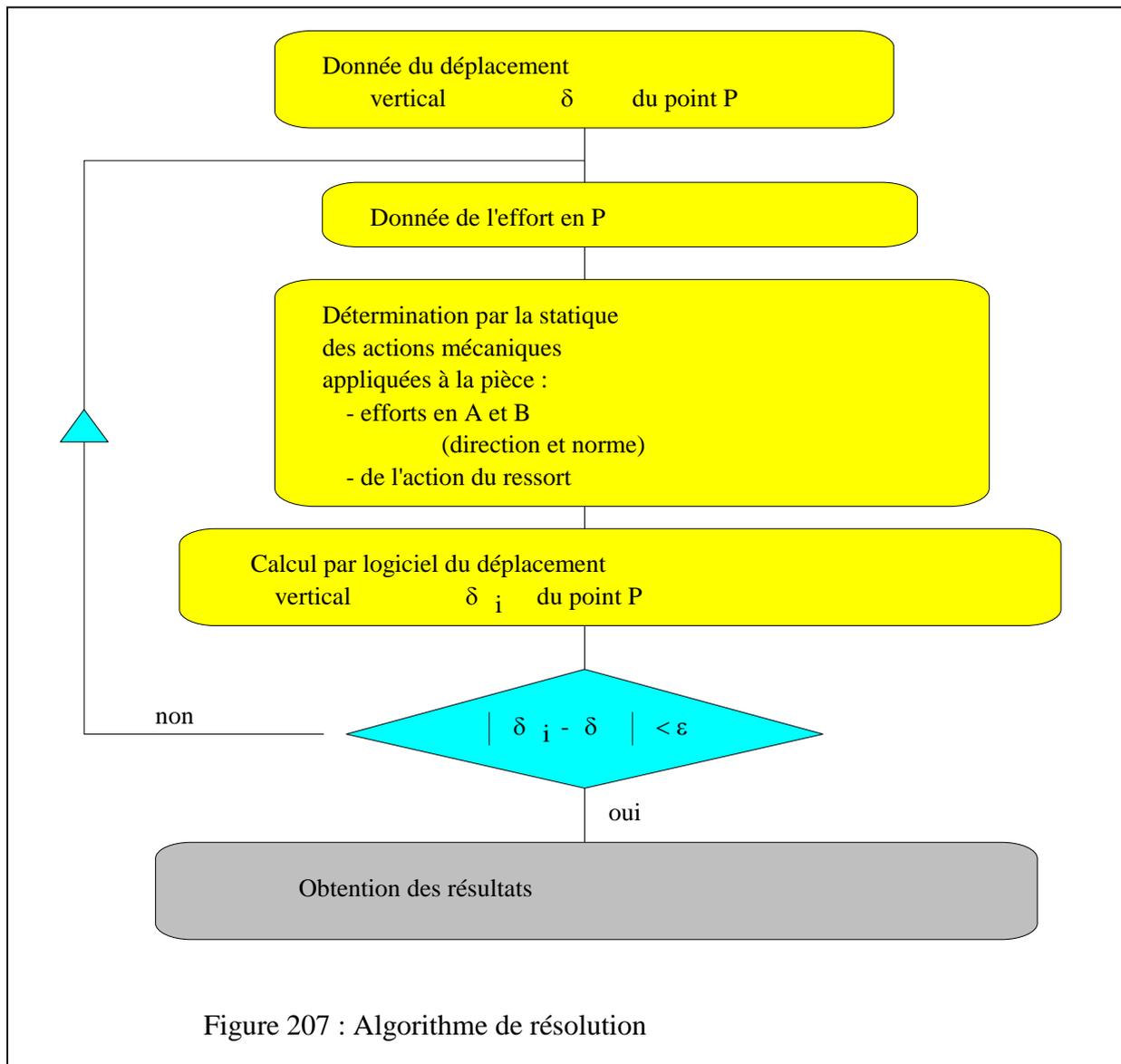
La démarche utilisée est la suivante :

Les résultats de l'étude en statique constituent un point de départ 'raisonnable' de la recherche itérative.

On suppose connues les valeurs des efforts F et F_R ; l'application du calcul permet de déterminer le déplacement du point C et la longueur effective du ressort. A partir de ces résultats, on évalue de nouveau l'effort F pour atteindre un déplacement vertical de l'accouplement hexagonal de 5 mm, et la valeur de F_R à partir de l'allongement du ressort...

Ce processus est répété jusqu'à ce que le déplacement du point C soit voisin de 5 mm et l'action du ressort en cohérence avec son allongement.

Un algorithme possible de résolution est alors le suivant : figure.207



Modèle définitif

Le modèle d'étude en terme de :

- maillage ;
- appuis ;
- efforts

est conforme à celui schématisé sur la figure 209. Toutes ces données sont répertoriées dans le fichier de calcul : galet.cal, ne pas oublier que le module de Young du matériau est de 1850 MPa.

Trois itérations sont nécessaires pour obtenir une convergence satisfaisante du processus.

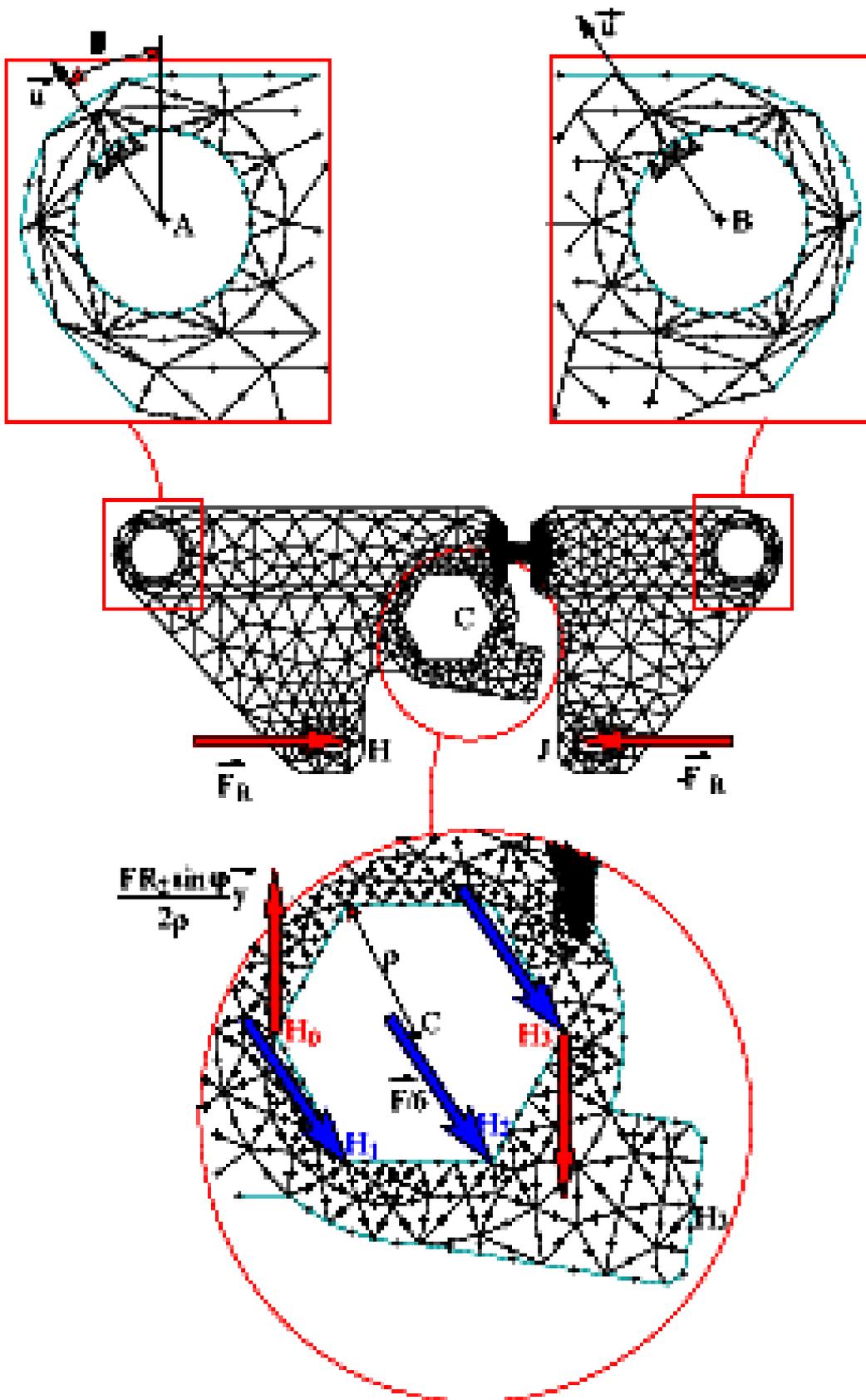


Figure208 Modèle d'étude

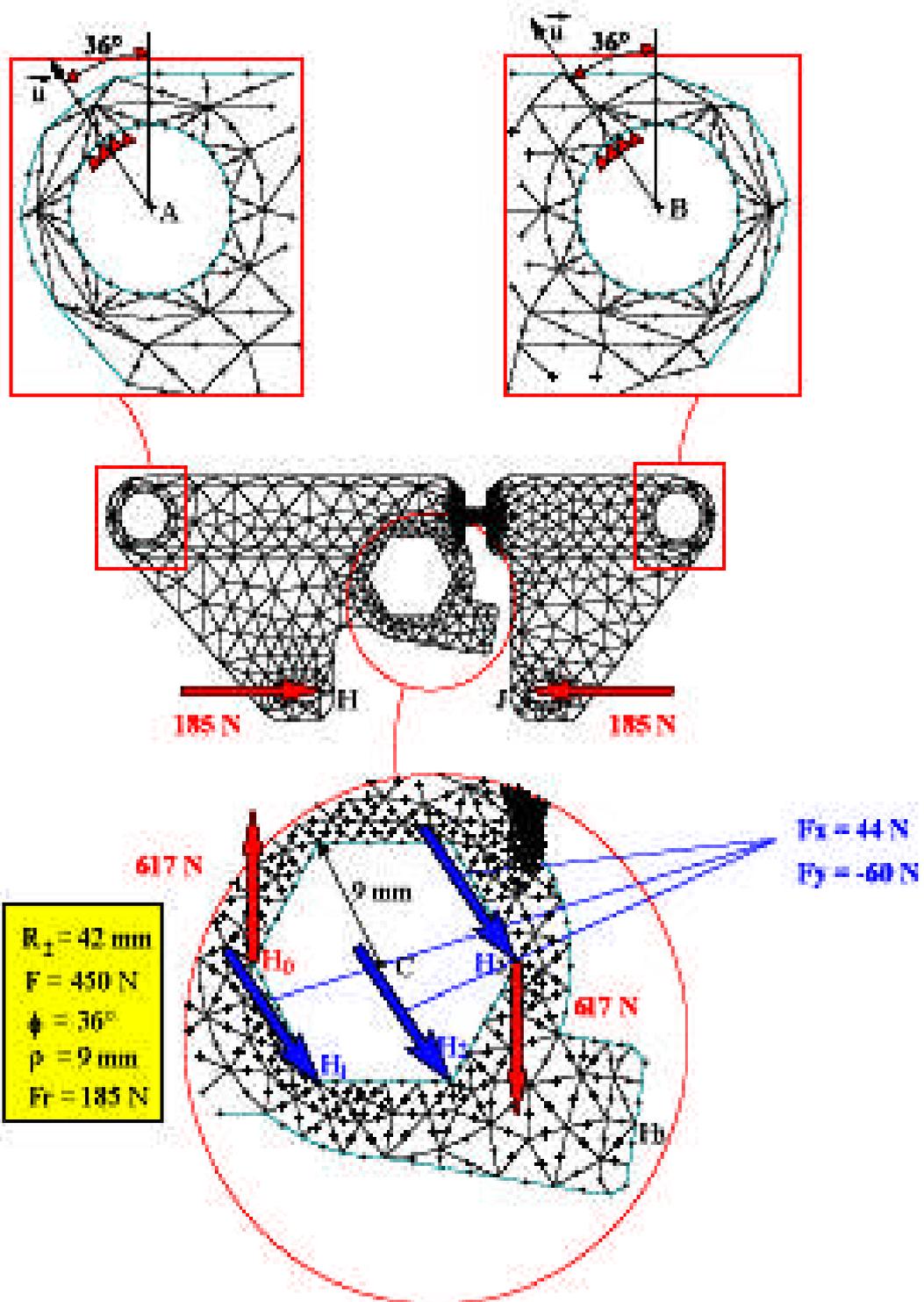


Figure 209 : Valeurs numériques

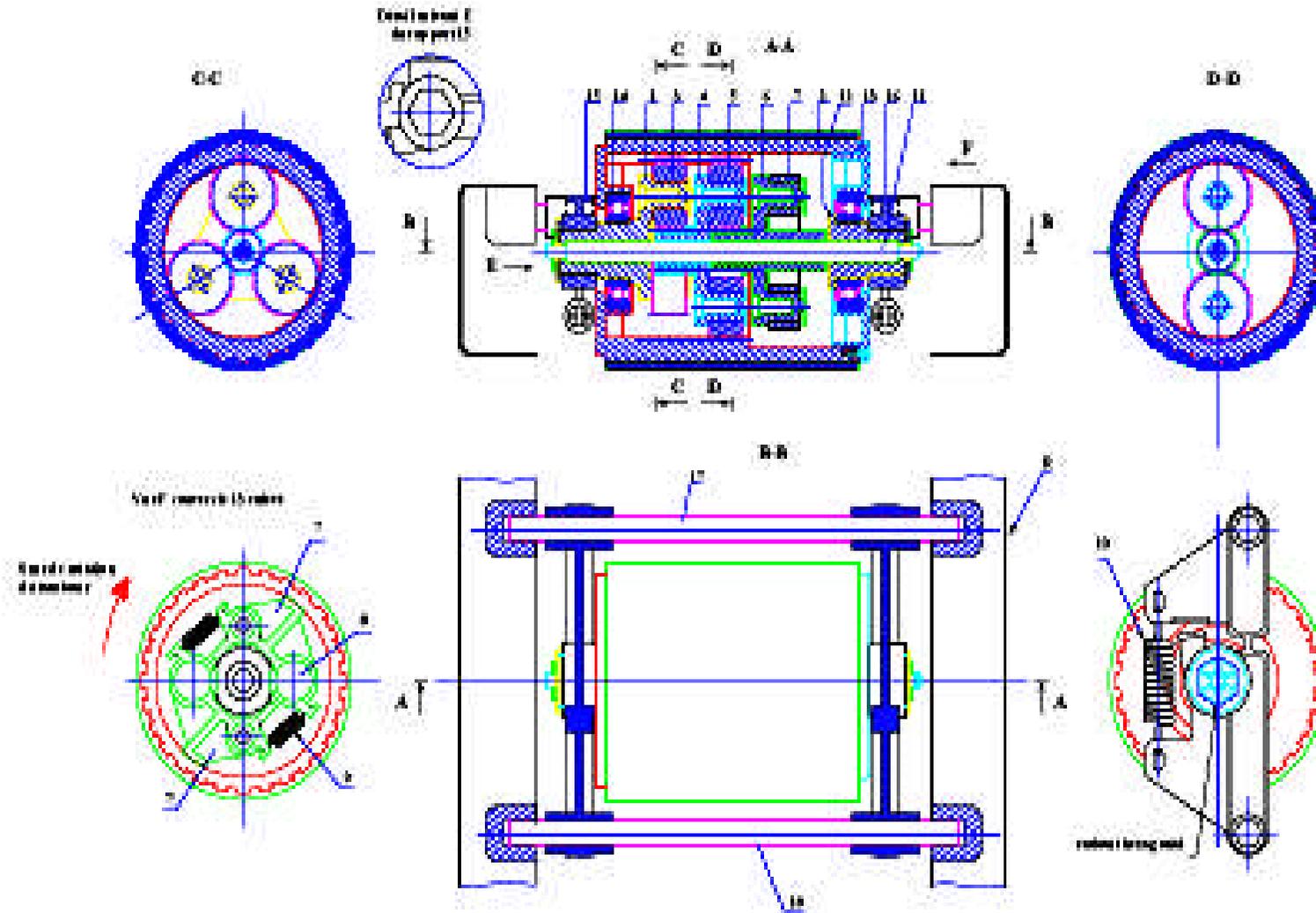


Figure 210 : Galet freineur

Bibliographie

1. J. BAHUAUD Notes de cours de mécanique des milieux continus INSA Lyon 1983
 2. L. BRILLOUIN Les tenseurs en mécanique et en élasticité Ed. Masson 1949
 3. F. BUREAU Calcul vectoriel et calcul tensoriel Ed. Université de Liège
 4. A.J. McCONNEL Applications of tensor analysis Ed. Dover Publications (Lavoisier) 1931
 5. A. KAUFMANN Cours de calcul tensoriel appliqué Ed. Albin Michel 1966
 6. V. DRIVASL. ROSENTHALY. SEMEZIS La pratique des tenseurs Ed. Eyrolles 1987
 7. C. JEANPERRIN Initiation progressive au calcul tensoriel Ed. Marketing 1987
 8. J.N. GENGE Introduction au calcul tensoriel R. GOUYON Calcul tensoriel
Ed. Vuibert 1963
 9. J. LELONG-FERRAND J.M. ARNAUDIES Cours de mathématiques Ed. Dunod 1978
 10. A. LICHNEROWICZ Eléments de calcul tensoriel Ed. Jacques Gabay 1987
 11. A. LICHNEROWICZ Algèbre et analyses linéaires Ed. Masson 1970
 12. E. RAMIS Exercices d'algèbre Ed. Masson 1974
 13. J. WINOGRADZKI Les méthodes tensorielles de la physique Ed. Masson 1979
 14. Recueil de normes françaises AFNOR 1983
 15. Yves DEBARD Notice du logiciel "RDM"
 16. J.P. FAURIE et al. Guide du dessinateur. Les concentrations de contraintes. CETIM
 17. J.P. HENRY et F. PARSY Cours d'élasticité. DUNOD Université 1982
 18. M. KERGUIGNAS et G. CAIGNAERT Résistance des Matériaux. DUNOD Université
1977
 20. G. SPINLER Cours photocopié de "Dimensionnement des organes de machine" Ecole
polytechnique fédérale de Lausanne 1985
 21. S. LAROZE et J.J. BARRAU: Mécanique des structures. Tome 1. Solides élastiques
plaques et coques 2e Edition EYROLLES-MASSON 1988
 22. A. POTIRON . Cours de Mécanique des Milieux Continus .Centre de l' ENSAM d'Angers
-