supplément de cours Master 2 Biophysique et Imagerie

Samir kenouche - Département de physique, faculté des sciences exactes - Université de Béjaia

A.1 Établissement des équations de Bloch

Pour une population de noyaux placée dans un champ magnétique $\vec{B}$:

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \vec{M} \wedge \vec{B} \tag{A1}$$

Soit,

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma(M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}) \wedge (B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}) \tag{A2}$$

Le produit vectoriel étant distributif, il vient :

$$\frac{d}{dt}(M_x\vec{i}+M_y\vec{j}+M_z\vec{k}) = \gamma(M_yB_z-M_zB_y)\vec{i}+\gamma(M_zB_x-M_xB_z)\vec{j}+\gamma(M_xB_y-M_yB_x)\vec{k} \tag{A3}$$

Les composantes M_x, M_y et M_z évoluent selon :

$$\frac{dM_x}{dt} = -\frac{M_x}{T_2}, \quad \frac{dM_Y}{dt} = -\frac{M_y}{T_2}, \quad \frac{dM_z}{dt} = \frac{M_0 - M_z}{T_1} \tag{A4}$$

Les équations de Bloch s'écrivent :

$$\frac{dM_x}{dt} = \gamma(M_yB_z - M_zB_y) - \frac{M_x}{T_2} \tag{A5}$$

$$\frac{dM_y}{dt} = \gamma(M_zB_x - M_xB_z) - \frac{M_y}{T_2} \tag{A6}$$

$$\frac{dM_z}{dt} = \gamma(M_xB_y - M_yB_x) + \frac{M_0 - M_z}{T_1} \tag{A7}$$

A.2 Résolution des équations de Bloch

Il s'agit d'un système différentiel du premier ordre à second membre variable que l'on résout par la méthode de Lagrange, dite de variation de paramètres. On pose d'abord :

$$\frac{dM_x}{dt} = -\frac{M_x}{T_2} \Longrightarrow M_x = k_x e^{-t/T_2} \tag{A8}$$

$$\frac{dM_y}{dt} = -\frac{M_y}{T_2} \Longrightarrow M_y = k_y e^{-t/T_2} \tag{A9}$$

$$\frac{dM_z}{dt} = \frac{M_0 - M_z}{T_1} \Longrightarrow M_0 - M_z = k_z e^{-t/T_1} \tag{A10}$$

On considère maintenant les k_x, k_y et k_z comme des variables et on dérive, il vient :

$$\frac{dk_x}{dt} e^{-t/T_2} - \frac{k_x}{T_2} e^{-t/T_2} = \gamma(M_y B_z - M_z B_y) - \frac{M_x}{T_2} \Longrightarrow \frac{dk_x}{dt} = \gamma e^{t/T_2}(M_y B_z - M_z B_y) \tag{A11}$$

Un raisonnement analogue sur k_y et k_z conduit aux équations :

$$\frac{dk_y}{dt} = \gamma e^{t/T_2}(M_z B_x - M_x B_z) \tag{A12}$$

$$\frac{dk_z}{dt} = \gamma e^{t/T_1}(M_y B_x - M_x B_y) \tag{A13}$$

Les Eqs. (A8), (A9) et (A10) s'écrivent :

$$M_x = \gamma e^{-t/T_2} \int e^{t/T_2}(M_y B_z - M_z B_y)dt \tag{A14}$$

$$M_y = \gamma e^{-t/T_2} \int e^{t/T_2}(M_z B_x - M_x B_z)dt \tag{A15}$$

$$M_0 - M_z = \gamma e^{-t/T_1} \int e^{t/T_1}(M_y B_x - M_x B_y)dt \tag{A16}$$

A.3 Calcul des composantes M_x, M_y et M_z

En portant dans l'Eq. (A16) les valeurs de M_x et de M_y, on aura :

$$M_0 - M_z = \gamma e^{-t/T_1} \int e^{t/T_1} \left(e^{-t/T_2} \int e^{t/T_2} \left(B_x(M_z B_x - M_x B_z) - B_y(M_y B_z - M_z B_y)\right) dt \right) dt \tag{A17}$$

$$M_0 - M_z = \gamma e^{-t/T_1} \int e^{t/T_1} \left(T_2(M_z B_x^2 - B_z M_x B_x - B_z M_y B_y + M_z B_y^2) \right) dt \tag{A18}$$

$$
\begin{aligned}
M_0 - M_z = e^{-t/T_1} \int e^{t/T_1}\gamma^2 T_2 M_z (B_x^2 + B_y^2) dt - e^{-t/T_1} \\
\int e^{t/T_1}\gamma^2 T_2 B_z (M_x B_x + M_y B_y) dt
\end{aligned} \tag{A19}
$$

$$
\begin{aligned}
M_0 - M_z = e^{-t/T_1} \int e^{t/T_1}\gamma^2 T_2 \left(\int \frac{dM_z}{dt} (B_x^2 + B_y^2) dt \right) dt \\
- e^{-t/T_1} \int e^{t/T_1}\gamma^2 T_2 B_z (M_x B_x + M_y B_y) dt
\end{aligned} \tag{A20}
$$

Soit avec $B_x = B_1 \cos\theta$, $B_y = -B_1 \sin\theta$ et $B_z = B_1$

$$
\begin{aligned}
M_0 - M_z = e^{-t/T_1} \int e^{t/T_1}\gamma^2 T_1 T_2 B_1^2 \left(\int \frac{dM_z}{dt} dt \right) dt - \gamma^2 T_2 B_0 e^{-t/T_1} \int e^{t/T_1} \\
\left(e^{-t/T_1} \int \gamma e^{t/T_1} (B_x (M_y B_z - M_z B_y) + B_y (M_z B_x - M_x B_z) dt \right) dt
\end{aligned} \tag{A21}
$$

$$
\begin{aligned}
M_0 - M_z = \gamma^2 T_1 T_2 B_1^2 M_z - \gamma^2 T_2 B_0 e^{-t/T_1} \\
\left(\int e^{t/T_1} \gamma T_2 (B_x B_z M_y - B_x B_y M_z + B_x B_y M_z - B_y B_z M_x)) \right) dt
\end{aligned} \tag{A22}
$$

$$
M_0 - M_z = \gamma^2 T_1 T_2 B_1^2 M_z - \gamma^2 T_2^2 B_0^2 \left(e^{-t/T_1} \int \gamma e^{t/T_1} (B_x M_y - M_z B_y) dt \right) \tag{A23}
$$

Le terme entre parenthèses est égale à $M_0 - M_z$ d'où

$$
\begin{aligned}
M_0 - M_z = \gamma^2 T_1 T_2 B_1^2 M_z - \gamma^2 T_2^2 B_0^2 (M_0 - M_z) \\
\Longrightarrow (M_0 - M_z)(1 + \gamma^2 T_2^2 B_0^2) = \gamma^2 T_1 T_2 B_1^2 M_z
\end{aligned} \tag{A24}
$$

$$
\boxed{M_z = M_0 \frac{1 + \gamma^2 T_2^2 B_0^2}{1 + \gamma^2 T_2^2 B_0^2 + \gamma^2 T_1 T_2 B_1^2 M_z}} \tag{A25}
$$

En portant M_y dans M_x, on obtient :

$$
M_x = \gamma e^{-t/T_2} \int e^{t/T_2} \left(B_z \left(e^{-t/T_2} \int e^{t/T_2} (M_z B_x - M_x B_z) dt \right) - M_z B_y \right) dt \tag{A26}
$$

$$
M_x = \gamma e^{-t/T_2} \int e^{t/T_2} \left(B_z T_2 \gamma (M_z B_x - M_x B_z) - M_z B_y \right) dt \tag{A27}
$$

$$
M_x = \gamma e^{-t/T_2} \int e^{t/T_2} \left(B_0 T_2 \gamma M_z B_x - M_x B_0^2 \gamma T_2 - M_z B_y \right) dt \tag{A28}
$$

$$M_x = e^{-t/T_2}\left(\gamma e^{t/T_2} T_2(M_z(B_0T_2\gamma B_x - B_0^2\gamma T_2 M_x)\right) \tag{A29}$$

$$M_x(1+\gamma^2 B_0^2 T_2^2) = M_0\gamma T_2 B_1 \frac{1+\gamma^2 B_0^2 T_2^2}{1+\gamma^2 B_0^2 T_2^2 + \gamma^2 B_1^2 T_2 T_1}(\gamma B_0 T_2 \cos\omega t + \sin\omega t) \tag{A30}$$

$$\boxed{M_x = \frac{M_0\gamma^2 B_1 T_2(\gamma B_0 T_2 \cos\omega t + \sin\omega t)}{1+\gamma^2 B_0^2 T_2^2 + \gamma^2 B_1^2 T_2 T_1}} \tag{A31}$$

En portant M_x dans M_y, il vient :

$$M_y = \gamma e^{-t/T_2}\int e^{t/T_2}\left(M_z B_x - B_z e^{-t/T_2}\left(\int e^{t/T_2}(M_y B_z - M_z B_y)dt\right)\right)dt \tag{A32}$$

$$M_y = \gamma e^{-t/T_2}\int e^{t/T_2}\left(M_z B_x - \gamma T_2 B_0^2 M_y + \gamma T_2 B_0 M_z B_y\right)dt \tag{A33}$$

$$M_y = -\gamma^2 T_2 B_0^2 \int dM_y dt + e^{-t/T_2}\int e^{t/T_2}\left(\int \frac{dM_z}{dt}(B_x + \gamma T_2 B_0 B_y)dt\right)dt \tag{A34}$$

$$M_y(1+\gamma^2 B_0^2 T_2^2) = \gamma T_2 B_1 M_z(\cos\omega t - \gamma T_2 B_0 \sin\omega t) \tag{A35}$$

$$\boxed{M_y = \frac{M_0\gamma^2 B_1 T_2(\cos\omega t - \gamma T_2 B_0 \sin\omega t)}{1+\gamma^2 B_0^2 T_2^2 + \gamma^2 B_1^2 T_2 T_1}} \tag{A36}$$

Toutes les composantes dépendent du champ radiofréquence B_1 et deviennent négligeables lorsque B_1 est élevé, si bien qu'on ne peut plus rien observer, on dit alors qu'il y a saturation. Le terme $\gamma^2 B_1^2 T_2 T_1$ est appelé facteur de saturation. Afin d'éviter cette saturation, on le prend toujours négligeable devant l'unité. La courbe de dispersion et la courbe de résonance sont des parties de ces composantes pour $t = 0$, alors :

$$M_x = \frac{M_0\gamma^2 B_0 B_1 T_2^2}{1+(\gamma B_0)^2 T_2^2} \tag{A37}$$

$$M_y = \frac{M_0\gamma B_1 T_2}{1+(\gamma B_0)^2 T_2^2} \tag{A38}$$