Exercice n° 1

a) Déterminer les dimensions linéaires de la conduite en charge de forme ovoïdale ACBFGEA, représentée par la figure ci-dessous, pour les données suivantes :

Débit volume $Q = 2,978 m^3 / s$

Gradient de la perte de charge linéaire $J = 5.10^{-4}$

Rugosité absolue caractérisant l'état de la paroi interne de la conduite $\varepsilon = 0,001m$

Viscosité cinématique du liquide en écoulement $\nu = 10^{-6} m^2 / s$

b) Vérifier les calculs en déterminant, pour les dimensions linéaires calculées :

i. Le gradient de la perte de charge linéaire J selon la relation de *Darcy-Weisbach*.

ii. Le débit volume Q par la formule générale.

iii. Le débit volume Q par la formule de *Chézy*.

Solution

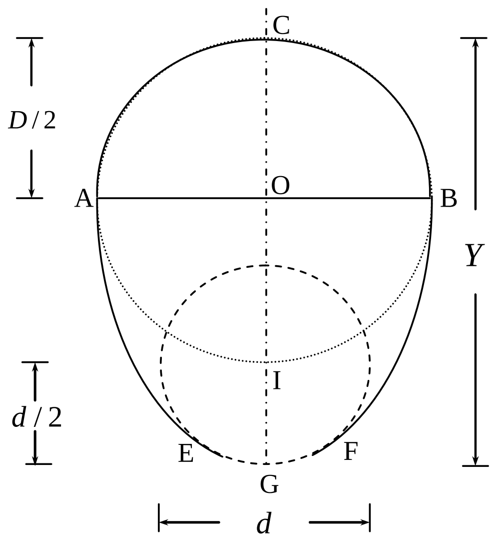
a)

i. La conduite est caractérisée par les dimensions linéaires suivantes :

Y : Hauteur de l'ouvrage

D : Diamètre du cercle dont le demi-arc $\overset{\frown}{ACB}$ constitue le toit de la conduite

d : Diamètre du cercle dont l'arc $\overset{\frown}{EGF}$ constitue le fond de la conduite



La meilleure méthode de résolution de ce type de problème est **la MMR ou Méthode du Modèle Rugueux** (*Achour, 2007, Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*).

- Le triangle $\triangle AOI$ permet aisément d'écrire que :

$$tg(\widehat{AIO}) = \overleftrightarrow{OA} / \overleftrightarrow{OI} = \frac{D/2}{D/2} = 1, \text{ Soit : } \widehat{AIO} = \pi / 2 \text{ radian} \tag{1}$$

- Il est également géométriquement possible d'écrire que :

$$\overleftrightarrow{BI}^2 = \overleftrightarrow{BO}^2 + \overleftrightarrow{OI}^2 = (D/2)^2 + (D/2)^2 = D^2/2, \text{ soit : } \overleftrightarrow{BI} = \frac{\sqrt{2}}{2} D = \overleftrightarrow{AI} \tag{2}$$

- En outre :

$$\overleftrightarrow{EI} = \overleftrightarrow{GI} = \overleftrightarrow{FI} = d/2 \tag{3}$$

- De plus :

  Le segment $\overleftrightarrow{BE}$ correspond au rayon du cercle de centre B et de diamètre 2D, soit :

$$\overleftrightarrow{BE} = D \tag{4}$$

- Or :

$$\overleftrightarrow{IE} = \overleftrightarrow{BE} - \overleftrightarrow{BI} = D - \frac{\sqrt{2}}{2} D = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) D \tag{5}$$

- Ainsi :

$$d/2 = \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) D \tag{6}$$

  ou bien : $d/D = \left(2 - \sqrt{2}\right) = 0,58578644 = \text{Constante}$

- La hauteur Y de la conduite est telle que :

$$Y = \overleftrightarrow{CI} + \overleftrightarrow{IG} = D + d/2 = D + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) D = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) D \tag{7}$$

  Nous pouvons ainsi écrire que :

$$Y/D = \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1,29289322 \cong 1,293 = \text{Constante}$$

Tenant compte de toutes ces considérations géométriques, il est simple de montrer que l'aire de la section mouillée A de l'ovoïde est :

$$A = \frac{\pi D^2}{4} \left(3 - \sqrt{2} - \frac{1}{\pi}\right) \tag{8}$$

ou bien :

$$A = \frac{D^2}{4} \left[\pi\left(3 - \sqrt{2}\right) - 1\right] \tag{9}$$

Nous pouvons donc observer que le rapport entre l'aire de la section mouillée A de l'ovoïde et celle de la section circulaire pleine de même diamètre est constant et vaut :

$$\frac{A}{\pi D^2/4}=\left(3-\sqrt{2}-\frac{1}{\pi}\right)=1,26747655=\text{Constante}$$

D'autre part, il est également aisé de montrer que le périmètre mouillé P de la section ovoïdale s'écrit :

$$P=\frac{\pi D}{4}\left(6-\sqrt{2}\right) \tag{10}$$

Ainsi, le rapport entre le périmètre mouillé de la conduite pleine ovoïdale et celui de la conduite circulaire de même diamètre est constant et vaut :

$$\frac{P}{\pi D}=\frac{6-\sqrt{2}}{4}=1,14644661$$

Tenant compte des relations (7) et (9), l'aire de la section mouillée A s'écrit, en fonction de la dimension linéaire Y :

$$A=\frac{\pi\left(3-\sqrt{2}\right)-1}{\left(4-\sqrt{2}\right)^2}Y^2 \tag{11}$$

De même, en tenant compte des relations (7) et (10), le périmètre mouillé P s'écrit en fonction de Y :

$$P=\frac{\pi\left(6-\sqrt{2}\right)}{2\left(4-\sqrt{2}\right)}Y \tag{12}$$

Le diamètre hydraulique $D_h=4A/P$ s'écrit d'une part, en tenant compte des relations (9) et (10) :

$$D_h=\frac{4\left[\pi\left(3-\sqrt{2}\right)-1\right]}{\pi\left(6-\sqrt{2}\right)}D \tag{13}$$

ou bien, d'autre part, en tenant compte des relations (11) et (12) :

$$D_h=\frac{8\left[\pi\left(3-\sqrt{2}\right)-1\right]}{\pi\left(4-\sqrt{2}\right)\left(6-\sqrt{2}\right)}Y \tag{14}$$

ii. Appliquons au modèle rugueux, la relation de *Darcy-Weisbach*, en admettant que le débit $\overline{Q}$ qu'il écoule est tel que $\overline{Q}=Q$, sous le gradient de la perte de charge linéaire $\overline{J}=J$:

$$J=\frac{1}{128g}\frac{\overline{P}}{\overline{A}^3}Q^2 \tag{15}$$

$\overline{A}$ et $\overline{P}$ désignent respectivement l'aire de la section mouillée et le périmètre mouillé du modèle rugueux. Ils sont respectivement donnés par les relations (11) et (12) en y remplaçant Y par $\overline{Y}$. Tenant compte de ces relations, la relation (15) devient :

$$J=\frac{1}{256g}\frac{\pi\left(6-\sqrt{2}\right)\left(4-\sqrt{2}\right)^5\overline{P}}{\left[\pi\left(3-\sqrt{2}\right)-1\right]^3\overline{Y}^5}Q^2 \tag{16}$$

Ainsi, la hauteur $\overline{Y}$ du modèle rugueux est :

$$\overline{Y}=\left[\frac{\pi\left(6-\sqrt{2}\right)}{256}\right]^{1/5}\frac{\left(4-\sqrt{2}\right)}{\left[\pi\left(3-\sqrt{2}\right)-1\right]^{3/5}}\left(\frac{Q}{\sqrt{gJ}}\right)^{2/5} \tag{17}$$

ou bien :

$$\overline{Y}=0,63475118\left(\frac{Q}{\sqrt{gJ}}\right)^{2/5} \tag{18}$$

Les données du problème sont telles que :

$$\overline{Y}=0,63475118\times\left(\frac{2,978}{\sqrt{9,81\times 5.10^{-4}}}\right)^{2/5}=2,84475973\,m$$

Selon la relation (14), le diamètre hydraulique de la section du modèle rugueux est :

$$\overline{D_h}=\frac{8\left[\pi\left(3-\sqrt{2}\right)-1\right]}{\pi\left(4-\sqrt{2}\right)\left(6-\sqrt{2}\right)}\overline{Y}=0,85511287\overline{Y} \tag{19}$$

Soit : $\overline{D_h}=0,85511287\times 2,84475973=2,43259064\,m$

Le périmètre mouillé $\overline{P}$ est, selon la relation (12) :

$$\overline{P}=\frac{\pi\left(6-\sqrt{2}\right)}{2\left(4-\sqrt{2}\right)}\overline{Y}=2,78574301\overline{Y} \tag{20}$$

Soit : $\overline{P}=2,78574301\times 2,84475973=7,92476954\,m$

Par suite, le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ de l'écoulement dans le modèle rugueux est :

$$\overline{R}=\frac{4Q}{\overline{P}\nu}=\frac{4\times 2,978}{7,92476954\times 10^{-6}}=1503135,19$$

iii. Le facteur de correction des dimensions linéaires ψ est par suite :

$$\psi=1,35\left[-\log\left(\frac{\varepsilon/\overline{D_h}}{4,75}+\frac{8,5}{\overline{R}}\right)\right]^{-2/5} \tag{21}$$

La relation (21) couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody*, sans aucune restriction.

Soit :

$$\psi = 1,35 \times \left[-\log\left(\frac{0,001/2,43259064}{4,75} + \frac{8,5}{1503135,19} \right) \right]^{-2/5} = 0,7726531$$

iv. Les dimensions linéaires recherchées sont ainsi :

- Hauteur de la conduite :

$$Y = \psi \overline{Y} = 0,7726531 \times 2,84475973 = 2,19801242\, m \cong 2,2\, m$$

- Diamètre D (relation 7) :

$$D = \frac{2Y}{4-\sqrt{2}} = \frac{2 \times 2,19801242}{4-\sqrt{2}} = 1,70007267\, m \cong 1,7\, m$$

- Diamètre d (relation 6) :

$$d = \left(2-\sqrt{2}\right) D = \left(2-\sqrt{2}\right) \times 1,70007267 = 0,99587951 m \cong 1 m$$

b)

i. Selon la relation de *Darcy-Weisbach*, le gradient de la perte de charge linéaire J est :

$$J = \frac{f}{8g} \frac{P}{A^3} Q^2 \qquad (22)$$

où f désigne le coefficient de frottement. Celui-ci est donné par la relation :

$$f = \frac{\psi^5}{16} \qquad (23)$$

Soit :

$$f = \frac{\psi^5}{16} = \frac{0,7726531^5}{16} = 0,01721087$$

Selon la relation (11), l'aire de la section mouillée A est :

$$A = \frac{\pi\left(3-\sqrt{2}\right)-1}{\left(4-\sqrt{2}\right)^2} Y^2 = \frac{\pi\left(3-\sqrt{2}\right)-1}{\left(4-\sqrt{2}\right)^2} \times 2,19801242^2 = 2,87716511 m^2$$

Le périmètre mouillé P est, en application de la relation (12) :

$$P = \frac{\pi\left(6-\sqrt{2}\right)}{2\left(4-\sqrt{2}\right)} Y = \frac{\pi\left(6-\sqrt{2}\right)}{2\left(4-\sqrt{2}\right)} \times 2,19801242 = 6,12309774\, m$$

Notons que le périmètre mouillé P aurait pu être simplement déterminé par la relation :

$$P = \psi \overline{P} = 0,7726531 \times 7,92476954 = 6,12309774\, m$$

Le gradient de la perte de charge linéaire J est par suite, selon la relation (22) :

$$J = \frac{f}{8g}\frac{P}{A^3}Q^2 = \frac{0,01721087}{8\times 9,81}\times\frac{6,12309774}{2,87716511^3}\times 2,978^2 = 5.10^{-4}$$

Il s'agit bien de la valeur de J donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

ii. La formule générale du débit est, selon *Achour* et *Bedjaoui* (*Achour* and *Bedjaoui*, 2006, Discussion, Exact solutions for normal depth problem, Journal of Hydraulic Research, 44, 5, 715-717) :

$$Q = -4\sqrt{2g}\,A\sqrt{R_h J}\,\log\left(\frac{\varepsilon / R_h}{14,8} + \frac{10,04}{\overline{R}}\right) \tag{24}$$

R_h désigne le rayon hydraulique. Dans la relation (24), le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ s'exprime par :

$$\overline{R} = 32\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} \tag{25}$$

La relation (24) est applicable à toutes les formes usuelles de conduites et couvre l'ensemble du domaine turbulent du diagramme de *Moody*.

Le rayon hydraulique R_h est :

$$R_h = A / P = 2,87716511 / 6,12309774 = 0,46988718\,m$$

Le nombre de *Reynolds* $\overline{R}$ est, selon la relation (25) :

$$\overline{R} = 32\sqrt{2}\,\frac{\sqrt{gJR_h^3}}{\nu} = 32\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{9,81\times 5.10^{-4}\times 0,46988718^3}}{10^{-6}} = 1020880,41$$

Ainsi, le débit volume Q est en vertu de la relation (24) :

$$Q = -4\times\sqrt{2\times 9,81}\times 2,87716511\times\sqrt{0,46988718\times 5.10^{-4}}\times$$
$$\log\left(\frac{0,001/0,46988718}{14,8} + \frac{10,04}{1020880,41}\right) = 2,97976884\,m^3/s \cong 2,980\,m^3/s$$

Ainsi, l'écart relatif entre la valeur du débit volume calculée et celle donnée à l'énoncé de l'exemple considéré n'est que de 0,06%.

iii. Selon la relation de *Chézy*, le débit volume Q est :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} \tag{26}$$

où $C(m^{0,5}/s)$ est le coefficient de résistance de *Chézy*. Le coefficient C est lié au facteur de correction des dimensions linéaires ψ par la relation (*Achour, 2007, Calcul des conduites et canaux par la MMR, Tome 1 : Conduites et Canaux en charge, LARHYSS/Edition Capitale, 610 pages*) :

$$C = \frac{8\sqrt{2g}}{\psi^{5/2}} \tag{27}$$

Soit :

$$C = \frac{8\times\sqrt{2\times 9,81}}{0,7726531^{5/2}} = 67,5271019\, m^{0,5}/s$$

Le débit volume Q est par suite, selon la relation (26) :

$$Q = CA\sqrt{R_h J} = 67,5271019\times 2,87716511\times\sqrt{0,46988718\times 5.10^{-4}} = 2,978\, m^3/s$$

Il s'agit bien de la valeur du débit volume Q donnée à l'énoncé de l'exemple d'application considéré.

Tracé de l'ovoïde

Le tracé de la forme ovoïdale de la conduite considérée s'opère selon les étapes suivantes :

i. Une fois le diamètre D déterminé, tracer le segment $[AB]$ qui correspond au diamètre D du cercle ACBIA de centre O (milieu de $[AB]$).

ii. Tracer le cercle ACBIA.

iii. Tracer la médiatrice du segment $[AB]$ qui coupe le cercle ACBIA aux points C et I.

iv. Tracer AI et BI.

v. Tracer l'arc de cercle $\overset{\frown}{BF}$ appartenant au cercle de centre A et de rayon $[AB]$. Le point F correspond à l'intersection de l'arc $\overset{\frown}{BF}$ et du segment de droite $[AF]$ passant par le point I.

vi. Tracer l'arc de cercle $\overset{\frown}{AE}$ appartenant au cercle de centre B et de rayon $[BA]$. Le point E correspond à l'intersection de l'arc $\overset{\frown}{AE}$ et du segment de droite $[BE]$ passant par le point I.

vii. Tracer enfin le cercle de diamètre d, calculé à l'étape *a(iv)*, de centre I, de rayon $[IE]=[IG]=[IF]$.

Le fond de la conduite est constitué par l'arc de cercle $\overset{\frown}{EGF}$, limité par les points E et F. Le secteur IEGFI vaut le quart du cercle de diamètre d.